

Tarea núm. 13

(PARA EL JUEVES 2 DIC 2021)

PROBLEMAS

1. Expresar las siguientes raíces cuadradas en la forma $a + ib$:

a) \sqrt{i} b) $\sqrt{-i}$ c) $\sqrt{1+i}$ d) $\sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}$.

2. Encontrar las raíces de los siguientes polinomios en la forma $a + ib$:

a) $z^4 + 1$ b) $z^4 - i$ c) $z^3 + 2i$ d) * $z^5 - 1$.

3. Calcular el valor absoluto de los siguientes números complejos:

a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{17}$ b) $-2i(3+i)(2+4i)$ c) $\frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$.

4. Expresar en términos de $\cos \theta$, $\sen \theta$:

a) $\cos 3\theta$ b) $\sen 5\theta$ c) $\sen 7\theta$.

5. Sea $z = \cos(\pi/50) + i \sen(\pi/50)$.

a) Demuestra que $1 + z^k + z^{2k} + \dots + z^{99k} = 0$ si k no es un múltiplo de 100.

b) Encuentra el valor de $1 - z^k + z^{2k} + \dots - z^{99k}$.

6. * Sea $f : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0$, $z \mapsto 1/z$. Demuestra: la imagen de un círculo o recta bajo f es un círculo o recta. Más preciso: la imagen de un círculo que no pasa por el origen es un círculo del mismo tipo; la imagen de una recta que no pasa por el origen es un círculo que pasa por el origen (menos el origen mismo); la imagen de una recta que pasa por el origen es una recta del mismo tipo.