Tarea núm. 11

(Para el jueves 4 nov 2021)

Definiciones

- Una función $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una *forma cuadrática* si es de la forma $Q(x, y) = Ex^2 + 2Fxy + Gy^2$ para unas constantes $E, F, G \in \mathbb{R}$. La forma es *diagonal* si $F = 0$.
- Una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *diagonaliza* una forma cuadrática Q si $Q \circ L$ es diagonal.

Proposiciones vistas en clase

- Toda forma cuadrática es diagonalizable mediante una rotación.

Problemas

1. Cada una de las siguientes ecuaciones describe alguna curva de segundo grado en el plano de algun tipo: circunferencia, parábola, elipse, hipérbola o un "caso degenerado"(par de rectas, una sola recta, un punto, o el conjunto vacío). En cada caso, indentifica el tipo la curva, y encuentra: en caso de circunferencia - el centro y el radio, en caso de parábola - el foco y la directriz, en caso de elipse – los focos, los tamaños de los ejes (mayor y menor), el centro y los vertices, en caso de hipérbola – los focos, los vértices y las asíntotas. También hay que dibujar la curva.

   a) $x^2 + 4x + y^2 + 8y + 19 = 0$
   b) $x^2 + 4x + 2y^2 + 16y + 19 = 0$
   c) $x^2 + 4x - 2y^2 + 16y + 19 = 0$
   d) $x^2 + 4x + 16y + 19 = 0$

   Sugerencia: encuentra un cambio de coordenadas $x = X + x_0, y = Y + y_0$ tal que en las nuevas coordenadas desaparezcan los términos lineales. Por ejemplo, en (a), $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$, $y^2 + 8y = (y + 4)^2 - 16$, así que tomamos $x_0 = -2, y_0 = -4$ ("completando el cuadrado").

2. Para cada una de las siguientes formas cuadráticas, encuentra una rotación que la diagonaliza: (a) xy, (b) $x^2 + xy$, (c) $(x + y)^2$, (d) $(x - y)^2$, (e) $3x^2 + 4xy + 5y^2$.

   Sugerencia. Por ejemplo, en (b), si tomamos $x = aX - bY, y = bX + aY$, entonces el coeficiente de XY en $x^2 + xy$ es $-2ab + a^2 - b^2$. Ahora tenemos que resolver las ecuaciones $-2ab + a^2 - b^2 = 0, a^2 + b^2 = 1$. Si tomamos por ejemplo $b = 1$ en la 1era ecuación, entonces $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 = 0$, así que $a = 1$. Para satisfacer la 2nda ecuación ajustamos los a, b multipliandolos ambos por un factor adecuado. .

3. Sea $Q(x, y) = Ex^2 + 2Fxy + Gy^2$ una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x, y) = 1\}$ y $\Delta = EG - F^2$.
   a) Si $\Delta > 0$ y $E > 0$ entonces C es una elipse. Encuentra sus focos en términos de E, F, G.
   b) Si $\Delta > 0$ y $E < 0$ entonces C es el conjunto vacio.
   c) Si $\Delta = 0$ y $Q \neq 0$ entonces C es un par de rectas paralelas o el conjunto vacio.
   d) Si $\Delta < 0$ entonces C es una hipérbola. Encuentra sus focos en términos de E, F, G.

   Sugerencia: sea $M = \begin{pmatrix} E & F \\ E & G \end{pmatrix}$ la matriz simétrica asociada a Q. Entonces $\Delta = det(M)$. Luego existe una rotación R tal que RMR^{-1} es diagonal, con elementos en la diágonal λ_1, λ_2, los valores propios de M, y $\Delta = \lambda_1\lambda_2$. Luego $Q \circ R^{-1}$ es diagonal, $(QR^{-1})(X, Y) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$.

4. * (Opcional) Cierto o falso: para todo $z \in \mathbb{R}$ existen $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $6x^2 + 11xy + 5y^2 + z = 0$.