3. Sea $Q(x,y) = Ex^2 + 2Fxy + Gy^2$ una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x,y) = 1\}$ y $\Delta = EG - F^2$.

a) Si $\Delta > 0$ y $E > 0$ entonces C es una elipse. Encuentra sus focos en términos de E, F, G.

b) Si $\Delta > 0$ y $E < 0$ entonces C es el conjunto vacio.

c) Si $\Delta = 0$ y $Q \neq 0$ entonces C es un par de rectas paralelas o el conjunto vacio.

d) Si $\Delta < 0$ entonces C es una hipérbola. Encuentra sus focos en términos de E, F, G.

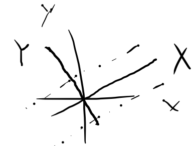
Sugerencia: sea $M = \begin{pmatrix} E & F \\ E & G \end{pmatrix}$ la matriz simétrica asociada a Q. Entonces $\Delta = det(M)$. Luego existe una rotación R tal que RMR^{-1} es diagonal, con elementos en la diágonal λ_1, λ_2, los valores propios de M, y $\Delta = \lambda_1\lambda_2$. Luego $Q \circ R^{-1}$ es diagonal, $(QR^{-1})(X,Y) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$.

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ $\quad \lambda_2 Y^2 = 1$ $\quad \lambda_2 < 0 \Rightarrow \emptyset$. $\quad \lambda_2 > 0 \Rightarrow Y = \pm\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ó $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$



- $Q(x,y) = (x \ \ y)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ \ y)\begin{pmatrix} Ex + Fy \\ Fx + Gy \end{pmatrix} = x(Ex+Fy) + y(Fx+Gy) = Ex^2 + 2Fxy + Gy^2$

?

vector renglon

mat. simétrica

vector columna

$(a \ \ b)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd$

- $\exists$ R = rotación. $R(x,y) = (ax - by, bx + ay)$ t.q. $R^{-1}SR$ es diagonal. ¿Porqué?

- Una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *diagonaliza* una forma cuadrática Q si $Q \circ L$ es diagonal.

PROPOSICIONES VISTAS EN CLASE

- Toda forma cuadrática es diagonalizable mediante una rotación.

$\exists R$ t.q. $Q \circ R$ es diagonal

$$Q(v) = v^t S v \Rightarrow (Q \circ R)(v) = Q(Rv) = (Rv)^t S (Rv) =$$

columna

$$= v^t \underbrace{R^t S R} v = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 \cancel{x}^2$$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow v^t = (x, y)$$

transpuesta

$$\boxed{R^t S R = \text{diagonal} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}}$$

$$= (x \;\; y) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{\text{mat. diagonal}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(Rv)^t = v^t R^t$$

ej.

<u>Nota:</u> para una rotación $R^{-1} = R^t$.

$$R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad R^t = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$a^2 + b^2 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} RR^t = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & b^2+a^2 \end{pmatrix} = I \\ R^t R = I \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{R^t = R^{-1}}$$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{EG-F^2}}{\Delta} = \det(S) \Rightarrow R^{-1} S R = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} = \det(R^{-1})\,\Delta\,\det(R) = \lambda_1 \lambda_2$$

$$= \det(R^{-1})\det(R)\,\Delta$$

$$= \det(R^{-1}R)\,\Delta$$

$$= \underset{\underset{1}{\shortparallel}}{\det(I)}\,\Delta = \Delta.$$

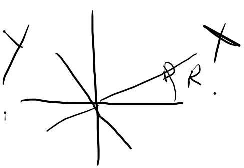
<u>conclusión</u>: $\Delta = EG - F^2 = \lambda_1 \lambda_2$

$$Q = Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 1$$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\left(\dfrac{X}{1/\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 + \left(\dfrac{Y}{1/\sqrt{\lambda_2}}\right)^2 = 1$



$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ $\left(\dfrac{X}{1/\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 - \left(\dfrac{Y}{1/\sqrt{|\lambda_2|}}\right)^2 = 1.$

	λ_1	λ_2	
$\Delta > 0$	+	+	elipse
	+	−	hiperbla.
	−	+	
$\Delta > 0$	−	−	$\emptyset$

(la $Q \geq 0$ y $= 0$ solo para $x = y = 0$)

(la $Q \leq 0$ y $= 0$ solo para $x = y = 0$

si $\underset{\underset{\Delta}{\shortparallel}}{\lambda_1 \lambda_2} > 0$, y $E > 0 \Rightarrow Q(1,0) = E > 0$

<u>Prop:</u> Si S es una mat. (no tiene que ser simetrica) y R otra matriz, invertible (no " " " rotación) tal que

$$R^{-1}SR = D \text{ es diagonal, } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

entones λ_1, λ_2 son valores propios de S.
y las columnas de R son los vect. prop. correspondiates. e_1

<u>Dem:</u>

$$R^{-1}SR = D \implies SR = RD$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

la 1era col.

$$Sv_1 = SRe_1 = RDe_1 = R\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
$$= R(\lambda_1 e_1) = \lambda_1 Re_1 = \lambda_1 v_1$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$ e_2

v_1 es vector propio de S correp. a λ_1.

⋮

v_2 " " " " " " λ_2.

$R = \text{col}(v_1, v_2)$

$$R = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$
$\uparrow \quad \uparrow$
$v_1 \quad v_2$

$v_1, v_2 \neq 0$ porque $\det R \neq 0$, (invertible).

1. Encuentra el eje, vértice y foco de la parábola $4x^2+12xy+9y^2+13x+28y+17=0$.

1) Rotación: $S=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$

Valores propios: $0=\det(S-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}4-\lambda & 6\\ 6 & 9-\lambda\end{pmatrix}=$

$=(4-\lambda)(9-\lambda)-36=\lambda^2-13\lambda=0$ $\quad \lambda=0$, $\lambda=13$

vect. prop: $\lambda=0$ $\quad \begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x+6y\\ 6x+9y\end{pmatrix}\begin{matrix}=0\\ =0\end{matrix}$

$4x+6y=0$, $x=1$, $y=-\frac{2}{3}$ $\Rightarrow v_1=(1,-2/3)/\sqrt{1+\frac{4}{9}}=\frac{3}{\sqrt{13}}(1,-\frac{2}{3})=\frac{1}{\sqrt{13}}=\frac{(3,-2)}{\sqrt{13}}$

$\lambda=13$ $\quad \begin{pmatrix}-9 & 6\\ 6 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0 \Rightarrow -9x+6y=0 \ /\div 3$

$-3x+2y=0$

$x=2$, $y=3$

$v_2=(2,3)/\sqrt{13}$

$Y_1=0$, $X_1=1 \Rightarrow (x,y)=\left(\frac{3,-2}{\sqrt{13}}\right)$

$(x,y)=X_1v_1+Y_1v_2=\left(\frac{3X_1,-2X_1}{\sqrt{13}}\right)+\left(\frac{2Y_1,3Y_1}{\sqrt{13}}\right)$

$=\left(\underbrace{\frac{3X_1+2Y_1}{\sqrt{13}}}_{=x},\ \underbrace{\frac{-2X_1+3Y_1}{\sqrt{13}}}_{=y}\right)$