Cónica general

"malos"

$$\underbrace{\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2}}_{\text{forma cuadrática}} + \underbrace{Dx + Ey}_{\text{lineal}} + \underbrace{F}_{\text{const.}} = 0$$

Meta: llevar la ecuación a un formato "estándar" $\boxed{B = D = E = 0}$

2 cambios de coordenadas

prob 1 → 1) translación: "matar los términos lineal" (encontrar el centro de elipse & hip.)

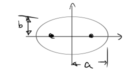
prob 2 → 2) rotación

"matar" el termino cruzado xy

"diagonalizar la parte cuadrática."

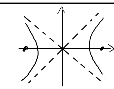
formas "estándar"

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, $a > b$,



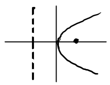
elipse

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$



hip.

$y^2 = 4ax$.



paráb.

⋮

("degenerados")

1. Cada una de las siguientes ecuaciones describe alguna curva de segundo grado en el plano de algun tipo: circunferencia, parábola, elipse, hipérbola o un "caso degenerado"(par de rectas, una sola recta, un punto, o el conjunto vacío). En cada caso, indentifica el tipo la curva, y encuentra: en caso de circunferencia - el centro y el radio, en caso de parábola - el foco y la directriz, en caso de elipse – los focos, los tamaños de los ejes (mayor y menor), el centro y los vertices, en caso de hipérbola – los focos, los vértices y las asíntotas. También hay que dibujar la curva.

a) $\underbrace{x^2 + 4x}_{=} + \underbrace{y^2 + 8y}_{=} + 19 = 0$

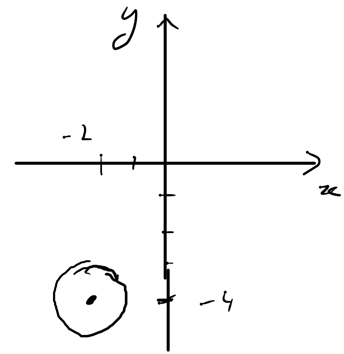
círculo ó vacío.

$$(x+2)^2 - 4 + (y+4)^2 - 16 + 19 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y+4)^2 = 1$$

$$\parallel$$

$$\text{dist}^2(\underbrace{(-2,-4)}_{\text{centro}}, (x,y)) = 1$$



círculo con radio 1 centro $(-2,-4)$

a') $x^2 + 4x + 2y^2 + 8y - 19 = 0$

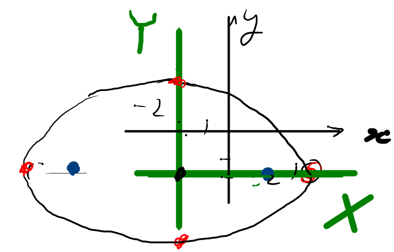
$$(x+2)^2 - 4 + 2(y^2+4y) - 19 = 0$$

$$(x+2)^2 + \underbrace{2(y+2)^2 - 8} = 19 \quad +4 = 23$$

$$\underbrace{(x+2)}_{X}{}^2 + 2\underbrace{(y+2)}_{Y}{}^2 = 31$$

$$\begin{cases} X = x+2 \\ Y = y+2 \end{cases} \iff \begin{array}{l} x = X-2 \\ y = Y-2 \end{array}$$

$$X^2 + 2Y^2 = 31 \qquad / \div 31$$

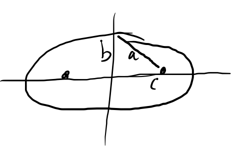


$$\frac{X^2}{31} + \frac{Y^2}{(31/2)} = 1$$

$$\left(\frac{X}{\sqrt{31}}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\sqrt{\frac{31}{2}}}\right)^2 = 1$$

→ una elipse, $\boxed{\text{centrada}}$ en $X = Y = 0$ $(x = y = -2)$

con $\boxed{\begin{array}{ll}\text{eje} & \text{mayor} \\ \text{"} & \text{menor}\end{array}}$ $\sqrt{31} \approx 5{,}5$; $\sqrt{\frac{31}{2}} \approx 4$



$c^2 = a^2 - b^2$

vértices: $(-2 \pm \sqrt{31}, -2)$, $\left(-2, -2 \pm \sqrt{\frac{31}{2}}\right)$

focos: $\left(-2 \pm \sqrt{31 - \frac{31}{2}}, -2\right) = \left(-2 \pm \sqrt{\frac{31}{2}}, -2\right)$

- Toda forma cuadrática es diagonalizable mediante una rotación.

O sea: si $Q(x,y) = Ex^2 + 2Fxy + Gy^2$

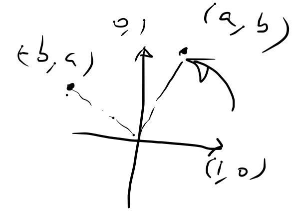
$\exists\, a, b$ t.q. $R(X,Y) = (aX - bY,\; bX + aY)$

dado: E, F, G

Se busca: a, b.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad a^2 + b^2 = 1$$

$$R\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$(Q\circ R)(X,Y) = E'X^2 + \underbrace{2F'}_{=0} XY + G'Y^2$$

← esto es diagonalizar

$$(Q\circ R)(X,Y) = E(aX - bY)^2 + 2F(aX - bY)(bX + aY) + G(bX + aY)^2$$

$$= \dots X^2 + \underbrace{\boxed{?}}_{=0} XY + \dots Y^2$$

$$\begin{cases} ① & -2Eab + 2F(a^2-b^2) + 2Gab = 0 \\ ② & a^2+b^2 = 1 \end{cases}$$

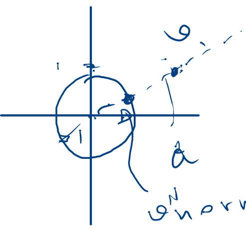
ec'n homogenea

(a,b) sol'n ⟹ λ(a,b) " ∀λ.

Si $b=1 \overset{①}{\Longrightarrow} -\cancel{2}Ea + \cancel{2}F(a^2-1) + \cancel{2}Ga = 0$

$$Fa^2 + (G-E)a - F = 0$$

$$a = \frac{E-G \pm \sqrt{(G-E)^2+4F^2}}{2F}$$



$$(a,1)/\sqrt{1+a^2} = \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

"normalizar" (a,1)

Otra manera: $Q = Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$

valor propio.

$R(x,y) = (ax-by,\ bx+ay)$ diagonaliza a $Q \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es un vector propio de $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

próxima clase.