Definiciones

- El *kernel* de una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, denotado por $\mathrm{Ker}(L)$, es el conjunto de vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $L(\mathbf{v}) = 0$.
- El *producto escalar* de dos vector $\mathbf{v}_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, es el número $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle := x_1 x_2 + y_1 y_2$.
- Una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es *simétrica* si $\langle L\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, L\mathbf{v}_2 \rangle$ para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$.
- Un *valor propio* de una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que existe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} \neq 0$, que satisface $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Si λ es un valor propio de L, los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $L\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ se llaman los *vectores propios* de L asociado a λ.

<u>Kernel:</u>

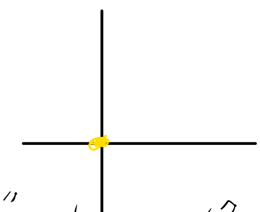
$$L(x,y) = (ax+by, cx+dy)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

- $\mathrm{Ker}(L) \neq \emptyset$?

NO. $\vec{0} \in \mathrm{Ker}(L)$, para toda L.

$L(0,0) = (0,0) \leftarrow$ el "vector 0", el "vector nulo", el "origen"

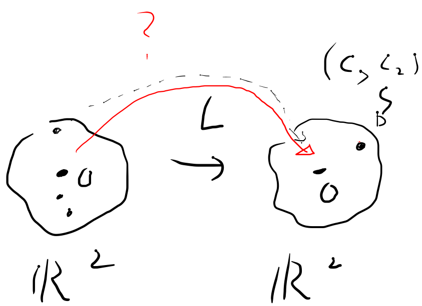


- $\mathrm{Ker}(I) = \{(x,y) \mid I(x,y) = (0,0)\} = \{\vec{0}\}$

$$\underset{(x,y)}{\overset{\shortparallel}{I(x,y)}}$$

$\ker(L)$ mide que tan inyectiva es L.

<u>Prop</u>: L es inyectiva $\iff \ker(L) = \{0\}$.



$\Rightarrow$: ✓

$\Leftarrow$: si $L(v_1) = L(v_2)$, $v_1 \neq v_2$

$$0 = L(v_1) - L(v_2) = L(\underbrace{v_1 - v_2}_{\Delta v}).$$

$$\Rightarrow 0 \neq \Delta v \in \ker(L).\ ✓$$

$$(IH) \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

resolver este sistema equivale a encontrar las preimagenes del vector $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ bajo la t. l. $L(x,y) = (a_1 x + b_1 y, a_2 x + b_2 y)$

<u>Reformulación</u>: una sol'n del sistema (IH) es única ssi

$$(H) \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y = 0 \end{cases}$$

(el sistema homogéneo correspondiente a (H))

tiene solamente la sol'n trivial.

ej 2 → Prop: $\ker(L) \neq \{0\} \iff \det(L) = a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$

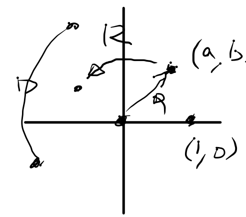
- $L = I$ es inyectiva $\iff \ker(I) = \{0\} \iff \det(I) \neq 0$.

$$\det(I) = \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$$

- $L = 0 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\ker(L) = \mathbb{R}^2$, $\det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0$.

t.l.

- R = rotación por $90°$



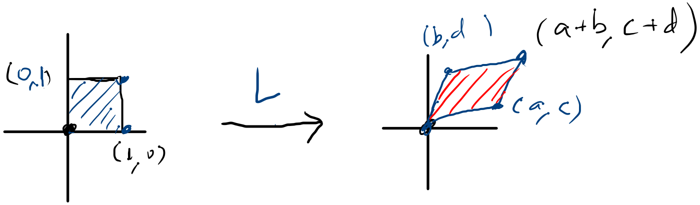
$\ker(R) = \{\vec{0}\}$, $\det(R) = 1$

$\neq \emptyset$

$$\det\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

R $a^2 + b^2 = 1$

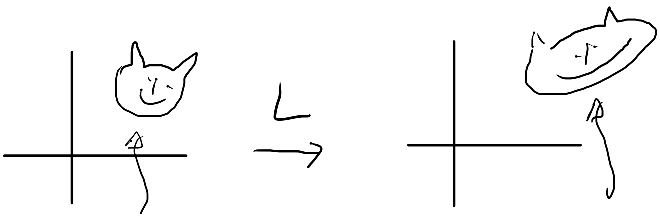
• Qué significa $\det(L)$ geométricamente, $L(x,y) = (ax+by, cx+dy)$



$L(1,0) = (a,c)$

Area $= 1$

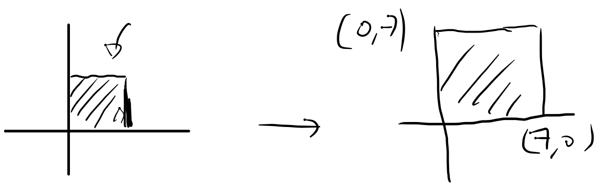
Area $= ad - bc = \det(L)$.



Area $= A$

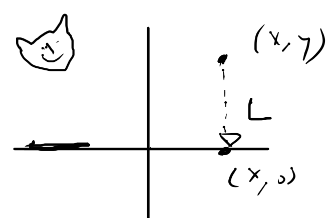
Area $= A \cdot \det(L)$.

• e.g. $L = 7I = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $(x,y) \mapsto (7x, 7y)$, $\det(L) = 49$



← area $= \underline{49}$.

• e.g. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(x,y) \mapsto (x,0)$.

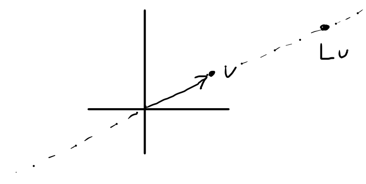


$\det L = 0$.

Def: $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio (eigen-valor) de $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (una t. l.)
si tiene un vector propio (eigen vector), o sea $v \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{v \neq 0}$, $\boxed{Lv = \lambda v}$

λ puede ser 0 ?!

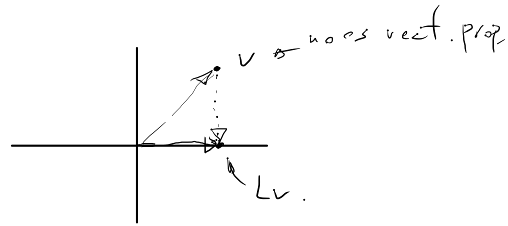
$\lambda \approx 2^+$



Sí, λ puede ser 0,
y en este caso, $\ker(L) \neq \{0\}$, $\det(L) = 0$!

Porque $\lambda = 0$ valor propio $\iff \exists v \neq 0$ t.q. $Lv = 0 \cdot v = \vec{0}$
$\iff v \in \ker(L) \iff \ker(L) \neq \{0\}$.

<u>e.g.</u> $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(x,y) \mapsto (x,0)$



- <u>$\lambda = 1$</u>: $(x,0)$, $x \neq 0$, es vector propio de valor propio $\lambda = 1$.

$(1,0) \mapsto (1,0)$

$\lambda = 1$

$\lambda = 1$,

$(x,0) \mapsto (x,0) = 1 \cdot (x,0)$

- <u>$\lambda = 0$</u>: $(0,y) \mapsto (0,0) = 0 \cdot (0,y)$

- $\ker(L) = \left\{ \begin{array}{l} \text{los vectores propios asociados} \\ \text{al valor propio } 0 \end{array} \right\} \cup \{0\}$

- $\det(L) = 0 \iff \lambda = 0$ es un valor propio

ejz $\Updownarrow$ $\ker(L) \overset{?}{\neq} \{0\}$