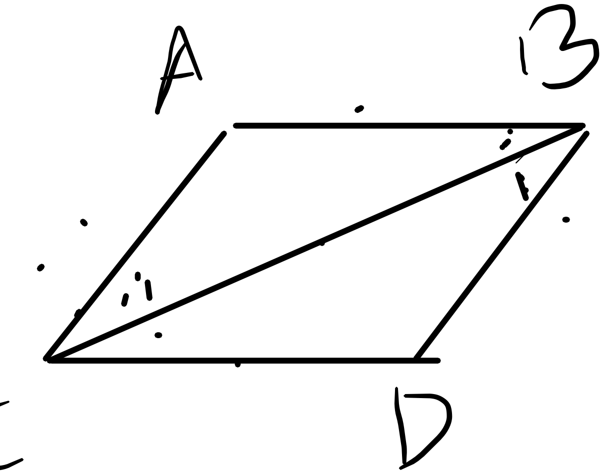
I. Definir: ángulo agudo/recto/obtuso, ángulos complementarios/suplementarios, triángulo isosceles/equilátero, bisectriz (de un ángulo), mediatriz (de un segmento), mediana/altura de un triángulo, paralelogramo, rectángulo, rombo, cuadrado, ángulo central/inscrito en un círculo, cuerda/tangente/radio/diámetro de un círculo, círculo inscrito/circumscrito de un triángulo.

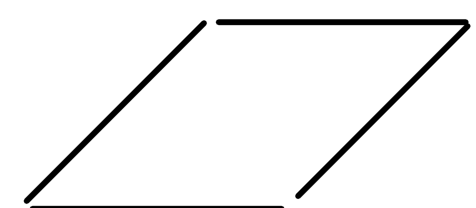
Paralelogramo: cuadrilátero t.q. lados opuestos son paralelos:



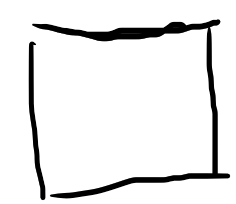
$AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$.

Teo: los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

Rombo: cuadrilátero equilátero.



Cuadrado: — " — regular (áng + lados long.)



1. a) Dos ecuaciones $A_i x + B_i y = C_i$, $i = 1, 2$, describen la misma recta si y solo si existe una $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$.

   b) Las rectas son paralelas si y solo si existe una $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$. Esta condición es equivalente a $A_1 B_2 = A_2 B_1$.

   c) Dos rectas no paralelas intersectan en un solo punto.

Repaso: 1a) ✓

$L_i = \{(x,y) \mid A_i x + B_i y = C_i\}$

$\forall i = 1,2$, $A_i \neq 0$ ó $B_i \neq 0$,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \\ C_2 = \lambda C_1 \end{cases} \text{ Para algun } \lambda \neq 0.$$

$\Leftarrow$ fácil

$\Rightarrow$ más dificil

Sugerencia: Dividir en casos

1) $A_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{A_2}{A_1}$

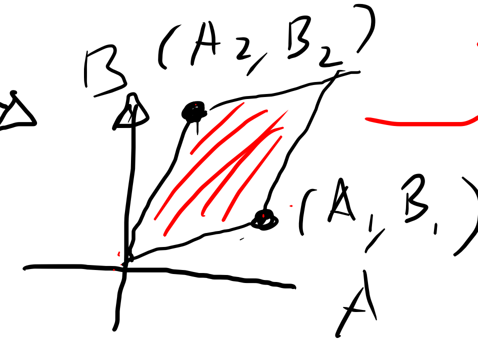
2) $B_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{B_2}{B_1}$

1b) $L_1 \parallel L_2 \iff \begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \end{cases}$ para algun $\lambda \neq 0 \iff A_1 B_2 = A_2 B_1$

$\Uparrow$

$L_1 = L_2$ ó $\boxed{L_1 \cap L_2 = \emptyset}$

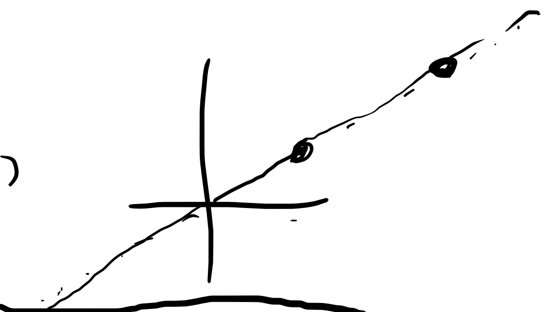
$\longleftrightarrow$



$\xrightarrow{\pm\,\text{area}}$ $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$

$L_1 : \begin{cases} A_1 x + B_1 y = C_1 \\ A_2 x + B_2 y = C_2 \end{cases} : L_2$

$(A_2, B_2) = \lambda (A_1, B_1) \iff$



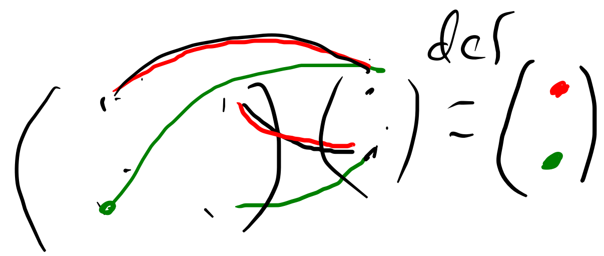
$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}}_{c}$$

$mx = c \quad / \cdot \frac{1}{m} \quad (\text{si } m \neq 0)$

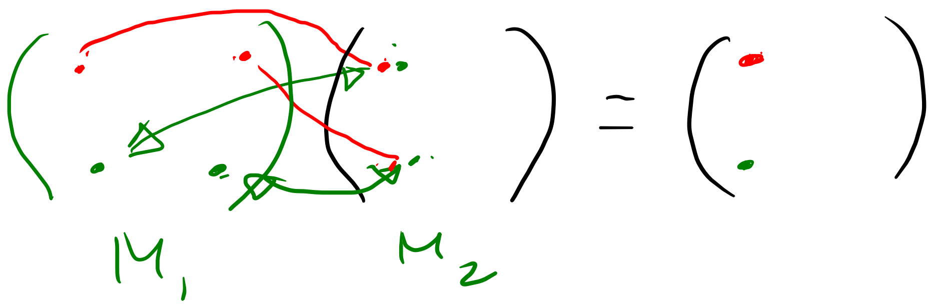
$\frac{1}{\cancel{m}} \cancel{m} x = \frac{1}{m} \cdot c$

$x = \frac{1}{m} c = \frac{c}{m}$

El caso de <u>una</u> ecuación lineal con <u>una</u> incógnita



← matriz × vector



← matriz × matriz

$$(M_1 M_2)M_2 = M_1(M_2 M_3)$$

← ej

$$M_1 + M_2 = M_2 + M_1$$

$$M_1(M_2 + M_3) = M_1M_2 + M_1M_3$$

propiedades básicas usuales

<u>OJO</u> $M_1 M_2 \neq M_2 M_1$ (en general)

<u>Def:</u> la matriz identidad → $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $MI = IM = M$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ ✓

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ ← ej

"inversa"

Def: un "recíproco" de una matriz M es una matriz M^{-1} t.q.

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I.$$

Obs: Si M^{-1} existe ent. es super fácil resolver

$$Mv = c \quad / M^{-1}\cdot$$

$$\overbrace{\cancel{M^{-1}M}}^{I}\, v = M^{-1}c$$

$$v = M^{-1}c \quad (v \in L_1 \cap L_2)$$

Teo: M es invertible (tiene recíproco M^{-1})

$$\Updownarrow$$

$$A_1 B_2 \neq A_2 B_1 \quad , \quad M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\det(M)}_{\Delta} = A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Prop: $\det(M_1 M_2) = \det(M_1)\det(M_2)$ (checar! fácil!)

no tiene inversa, $\det = 2-2=0$

Demo: $\det \neq 0$,

$\boxed{\Uparrow}$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_2 & -B_1 \\ -A_2 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

✓

$$\Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{A_1 B_2 - B_1 A_2}\begin{pmatrix} B_2 & -B_1 \\ -A_2 & A_1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\boxed{\Downarrow}$ si M^{-1} existe $\Rightarrow M M^{-1} = I$

$\Rightarrow \det(M)\cdot\det(M^{-1}) = \det(I) = 1$ (prop.)

$\Rightarrow \neq 0$

Demostración de 1b

P.D 1: $L_1 \parallel L_2 \Rightarrow \det(M) = A_1B_2 - A_2B_1 = 0$

① $L_1 = L_2 \underset{1a}{\Rightarrow} A_1B_2 - A_2B_1 = A_1\lambda B_1 - \lambda A_1 B_1 = 0$ ✓

ó

② $L_1 \cap L_2 = \emptyset \Rightarrow \underset{\text{no tiene sol'n}}{Mv = c} \Rightarrow$ M no es invertible $\Rightarrow \det(M) = 0$

∎

P.D 2: $\det(M) = 0 \Rightarrow L_1 \parallel L_2$ (completar).