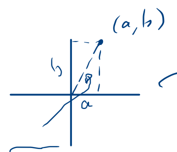
Definiciones.

- Una *recta* en $\mathbb{R}^2$ es el cojunto de soluciones de una ecuación de la forma $Ax+By=C$, con $A\neq 0$ ó $B\neq 0$. Por ejemplo: $\{(a,0)\mid a\in\mathbb{R}\}$ (el eje de x) es una recta, dada por $y=0$ ($A=C=0$, $B=1$).
- Dos rectas son *paralelas* si coinciden o no se intersectan. Por ejemplo, $x=1$ es paralela a $x=0$ (el eje de y).
- La *pendiente* de la recta $Ax+By=C$ es $\cancel{-B/A}$ $-A/B$ (si $A=0$ la pendiente es 'inifinita').
- La *norma* de un punto $P=(a,b)$ es $\|P\| := \sqrt{a^2+b^2}$.
- La *distancia* entre dos puntos es la norma de su diferencia; es decir, la distancia entre (a_0,b_0) y (a_1,b_1) es $\|(a_1-a_0,b_1-b_0)\| = \sqrt{(a_1-a_0)^2+(b_1-b_0)^2}$.



$\sqrt{a^2+b^2} = \|(a,b)\|$

$y = -\frac{Ax + C}{B} = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$

pendiente

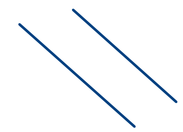
Problemas.

1. *a)* Dos ecuaciones $A_ix+B_iy=C_i$, $i=1,2$, describen la misma recta $\boxed{\text{si y solo si}}$ existe una $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$, tal que $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$, $C_2=\lambda C_1$.
   b) Las rectas son paralelas si y solo si existe una $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$, tal que $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$. Esta condición es equivalente a $A_1B_2=A_2B_1$.
   c) Dos rectas no paralelas intersectan en un solo punto.

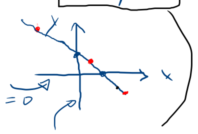
b) ejemplo

$x+y=1$, $2x+2y=3$

$-\frac{\lambda A}{\lambda B} = -\frac{A}{B}$



$\boxed{x+y=1}$



Soluciones:
- $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
- $(2,-1)$
- $(-2,3)$

a) $\Leftarrow$: Sea $L_i = \{(x,y)\mid A_ix+B_iy=C_i\}\subset\mathbb{R}^2$

$(a,b)\in L_1 \Rightarrow A_1a+B_1b=C_1 \quad /\cdot\lambda$

$\Rightarrow \lambda(A_1a+B_1b)=\lambda C_1$

$(\lambda A_1)a+(\lambda B_1)b=\lambda C_1$

$A_2a+B_2b=C_2$

$\Rightarrow (a,b)\in L_2.$

$\Rightarrow L_1\subset L_2$

P.D. $L_2\subset L_1$.

$(a,b)\in L_2 \Rightarrow A_2a+B_2b=C_2 \quad /\cdot\frac{1}{\lambda}$

$\vdots$

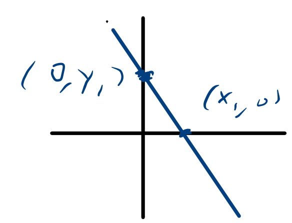
$L_2\subset L_1$.

$\Rightarrow$: Supongamos $\{(x,y)\mid A_1x+B_1y=C_1\} = \{(x,y)\mid A_2x+B_2y=C_2\}$

P.D. $\exists\lambda\neq 0$, t.q. $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$, $C_2=\lambda C_1$.

$L_1=L_2$ no pasa por el origen, intersecta el eje de x, intersecta el eje de y.

$\boxed{C_1\neq 0} \Rightarrow C_2 = \underbrace{\left(\frac{C_2}{C_1}\right)}_{\lambda}\cdot C_1 = \lambda C_1$.



Sea $(x_1,0)\in L_1=L_2 \Rightarrow A_1x_1=C_1$, $A_2x_1=C_2$.

$\Rightarrow \lambda A_1x_1=\lambda C_1=C_2=A_2x_1 \Rightarrow \lambda A_1x_1=A_2x_1$

$\boxed{\text{Si } x_1\neq 0} \Rightarrow \lambda A_1=A_2$.

si $(0,y_1)\in L_1=L_2$, $\boxed{y_1\neq 0} \Rightarrow \ldots \lambda B_1=B_2$.

Conclusión: hemos demostrado "$\Rightarrow$" en caso que $L_1=L_2$ no pasa por el origen.

Falta: demostrar en el caso que no se cumplen

Para la c) (si $l_1 \nparallel l_2 \Rightarrow l_1 \cap l_2 =$ un solo punto)
introducimos una nueva notación. La intersección es el conj. de soluciones de

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y = C_1 \\ A_2 x + B_2 y = C_2 \end{cases} \iff Mv = w$$

nueva multiplicación

/ M^{-1}.

$$\Rightarrow v = M^{-1} w$$

¿?

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

matriz 2×2

matriz 2×1 (vector)

filas col.