## Tarea 8: Sugerencias para problemas 2+3 de la p. 84 de Vinberg

**Problema 3.** Find all irreducible continuous representations of the $k$-dimensional torus $\mathbb{T}^k$.

Nota: por definición, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

Se trata de representaciones irreducibles *complejas* de $\mathbb{T}^k$, las cuales sabemos que son necesariamente 1-dimensionales (Schur). Así que lo que se pide es encontrar los homomorfismos continuos $\mathbb{T}^k \to \mathbb{C}^*$.

**Respuesta.** *Todo homomorfismo continuo* $\rho : \mathbb{T}^k \to \mathbb{C}^*$ *es de la forma* $\rho(z_1, \ldots, z_k) = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_k^{\alpha_k}$ *para unos únicos* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{Z}$.

Así que el mapa $\rho \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ define un isomorfismo $\widehat{\mathbb{T}^k} \simeq \mathbb{Z}^k$ entre el grupo de representaciones continuas complejas 1-dimensionales de $\mathbb{T}^k$ y $\mathbb{Z}^k$. Es un resultado esencial en la teoría de representaciones de grupos de Lie (y tambien de muchas otras áreas, como análisis de Fourier). La demostración que conozco no es difícil, suponiendo algo de la teoría topológica de espacios cubrientes. Va un bosquejo.

1. $\mathbb{T}^k$ es compacto, por lo que $\rho(\mathbb{T}^k) \subset \mathbb{C}^*$ tambien lo es, así que es *acotado*.
2. Todo subgrupo acotado de $\mathbb{C}^*$ está contenido en $\mathbb{T}$, así que $\rho(\mathbb{T}^k) \subset \mathbb{T}$.
3. Sea $p_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{T}^k$ el homomorfismo $p_k(t_1, \ldots, t_k) = (e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_k})$. Demuestra que para toda función continua $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}$ tal que $f(1, \ldots, 1) = 1$ existe una única función continua $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}(0, \ldots, 0) = 0$ y $p_1 \circ \tilde{f} = f \circ p_k$ (usa el hecho que $p_k$ es la cubierta universal de $\mathbb{T}^k$).
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ p_n \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \mathbb{T}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{T} \end{array}$$
4. En el inciso anterior, si $f$ es un homomorfiso de grupos, $\tilde{f}$ también lo es; es decir, es aditivo. (Usa la unicidad del levantamiento $\tilde{f}$.)
5. Todo $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ aditivo y *continuo* es lineal, i.e. $L(t_1, \ldots, t_k) = \sum_i \alpha_i t_i$ para unos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. (Define $\alpha_i := L(e_i)$, donde $e_1, \ldots, e_k$ es la base canónica de $\mathbb{R}^k$, luego demuestra que $L(t_1, \ldots, t_k) = \sum_i \alpha_i t_i$ para $t_i \in \mathbb{Q}$, luego usa continuidad para concluir igualdad para todo $t_i \in \mathbb{R}$.)
6. Demuestra que una $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ lineal desciende a $\mathbb{T}^k \to \mathbb{T}$, i.e. existe un homomorfismo continuo $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}$ tal que $p_1 \circ \tilde{f} = f \circ p_k$, si y solo si $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$. (Usa el hecho que $\mathbb{Z}^k$ es el kernel de $p_k$.)
7. Concluye que todo homomorfismo continuo $\mathbb{T}^k \to \mathbb{T}$ es de la forma $(z_1, \ldots, z_k) \mapsto z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_k^{\alpha_k}$ para unos únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{Z}$.

(Actualizado: 10 de marzo de 2020).