Notas núm. 2

Nota: todas las representaciones son complejas, de dimesnión finita (a menos que diga otra cosa...).

Definición. Sea X un conjunto y G un grupo. Una *acción* de G en X es un homomorfismo ϕ entre G y el grupo de biyecciones $X \to X$. Se dice en este caso que X es un G-espacio.

O sea, para cada $g \in G$, $\phi(g) : X \to X$ es una biyección, $\phi(e) = id_X$ (la transformación identidad de X) y $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$ para todo $g_1, g_2 \in G$. A veces se escribe simplemente $g{\cdot}x$ o incluso gx en lugar de $\phi(g)(x)$, así que la regla $\phi(g_1g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$ es la "asociatividad" $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$.

Ejemplo. Una representación de un grupo es un caso especial de acción, una acción *lineal*, donde X es un espacio vectorial y cada $\phi(g)$ es una transformación lineal.

Definición. Dada una acción de un grupo G en un conjunto X,

- un *punto fijo* de un $g \in G$ es un $x \in X$ tal que $gx = x$.
- Los puntos fijos de G son los puntos $x \in X$ que son fijos para todo $g \in G$.
- La acción es *libre* si ningun elemento $g \in G$, $g \neq e$, tiene puntos fijos.
- La acción es *trivial* si $\phi(g) = id_X$ para todo $g \in G$.
- La acción es *efectiva* si el kernel de ϕ es trivial (cada elemento $g \neq e$ "hace algo").
- La acción es *transitiva* si para todo $x, y \in X$ existe un $g \in G$ tal que $gx = y$.
- La *órbita* de un $x \in X$ es el conjunto $G \cdot x = \{gx | g \in G\} \subset X$.
- El *estabilizador* de un $x \in X$ es el conjunto $G_x = \{g \in G | gx = x\} \subset G$.

→**1.1.** Cada estabilizador $G_x \subset G$ es un subgrupo. Estabilizadores de puntos sobre la misma órbita son subgrupos conjugados. La relación "estar en la misma órbita" es una relación de equivalencia en X; las clases de equivalencia son las órbitas. Demuestra que $gG_x \mapsto gx$ define una biyección $G/G_x \to G \cdot x$.

(Nota: la notación G/H, para un subgrupo $H \subset G$, significa el conjunto de las clases laterales derechas de H, i.e. los conjuntos de la forma gH, $g \in G$.)

Definición. Para cada grupo G se definen tres acciones de G en G mismo: translaciones por la izquierda, por la derecha y conjungación. La translación por la izquierda por g manda $x \mapsto gx$, por la derecha manda $x \mapsto xg^{-1}$, y la conjugación manda $x \mapsto gxg^{-1}$.

→**1.2.** Verifica que las acciones de la última definición satisfacen las propiedades requeridas de ser acción. Determina cuáles son los puntos fijos de las acciones, cuáles acciones son libres, cuáles son efectivas.

Definición. Una función entre dos G-espacios $F : X \to Y$ es G-equivariante si $F(gx) = gF(x)$ para todo $g \in G$, $x \in X$.

→**1.3.** Para todo subgrupo $H \subset G$, la acción de G en G por translaciones por la izquierda induce una acción de G en G/H, $g : xH \mapsto gxH$. Demuestra que la biyección $G/G_x \to G \cdot x$ del último ejercicio es G-equivariante.

→**1.4.** Considera la acción natural de $G = S_3$ (el grupo de permutaciones de $\{1,2,3\}$) en $X = \{1,2,3\}$ ($\phi(g) = g$). Encuentra las órbitas y los estabilizadores. Repite lo mismo para las acciones izquierda, derecha y conjugación de G en G.

→**1.5.** Sean G_1, G_2 dos grupos y X un conjunto. Demuestra que existe una biyección entre acciones de $G_1 \times G_2$ en X y pares de acciones ϕ_1, ϕ_2 de G_1, G_2 (resp.) en X que conmutan, i.e. $\phi_1(g_1) \circ \phi_2(g_2) = \phi_2(g_2) \circ \phi_1(g_1)$, para todo $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$.

Sugerencia: a un par de acciones de G_1, G_2 asociamos la acción de $G_1 \times G_2$ dada por la fórmula $(g_1, g_2)x = g_1(g_2 x)$.

Definición. Con una acción de G en X se asocia una representación ρ de G en $\mathbb{C}[X]$, el espacio de todas las funciones $f : X \to \mathbb{C}$, llamada *la representación de permutación*, dada por $[\rho(g)f](x) = f(g^{-1}x)$.

→**1.6.** Esta es una representación, de dimensión finita si y solo si X es un conjunto finito. Si X es finito, $\dim \mathbb{C}[X] = |X|$ (la cardinalidad de X). Una base para $\mathbb{C}[X]$ está dada por el conjunto $\{\delta_x | x \in X\}$ donde $\delta_x(y) = 1$ si $x = y$ y $\delta_x(y) = 0$ si $x \neq y$.

→**1.7.** $\rho(g)\delta_x = \delta_{gx}$.

La fórmula del último ejercicio sugiere idenificar $\mathbb{C}[X]$ con el conjunto de combinaciones lineales formales de elementos de X. Esto es, la función $f : X \to \mathbb{C}$ está identificada con $\sum_x f(x)x$. La ventaja de esta notación es que la representación de permutación asociada a una acción de G en X es simplemente "extender por linealidad" la acción en X a las combinaciones lineales de elementos de X.

→**1.8.** Sean X_1, X_2 G-espacios. Encuentra G-isomorfismos (a) $\mathbb{C}[X_1 \times X_2] \simeq \mathbb{C}[X_1] \otimes \mathbb{C}[X_2]$, (b) $\mathbb{C}[X_1 \cup X_2] \simeq \mathbb{C}[X_1] \oplus \mathbb{C}[X_2]$ si $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Definición. Para un grupo finito G, $\mathbb{C}[G]$ se llama el *álgebra del grupo*. Definimos un producto hermitiano en $\mathbb{C}[G]$,

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\phi_1(g)} \phi_2(g).$$

→**1.9.** Esta definición es equivalente a declarar a la base $\{\sqrt{|G|}\delta_g \,|\, g \in G\}$ una base unitaria.

→**1.10.** Demuestra que la representación de $G \times G$ en $\mathbb{C}[G]$ asociadas con las acciones de translaciones izquierda y derecha de G en G son unitarias con respecto al producto hermitiano en el álgebra de G definido arriba.

Pensando en $\mathbb{C}[G]$ como "combinaciones lineales de elementos de G", podemos extender linealmente el producto $G \times G \to G$ a un producto bilineal $\mathbb{C}[G] \times \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$. A este producto nos referimos cuando llamamos a $\mathbb{C}[G]$ "el álgebra de G".

→**1.11.** Demuestra que $\mathbb{C}[G]$ es un álgebra conmutativo ssi G es conmutativo.

→**1.12.** Pensando en $\mathbb{C}[G]$ como funciones $G \to \mathbb{C}$, escribe explicitamente el producto. A este producto de funciones en G se llama a veces *convolución*, y se denota por $f_1 * f_2$. (Respuesta: $(f_1 * f_2)(x) = \sum_g f_1(g) f_2(g^{-1}x)$.)

Proposición (“las relaciones de ortogonolidad de Schur”). Sea ρ una representación irreducible compleja de un grupo finito G en un espacio vectorial V de dimensión finita n, unitaria con respecto a un producto hermitiano invariante en V. Entonces

(a) Las n^2 componentes de ρ, con respecto a una base unitaria de V, satisfacen

$$\langle \rho_{ij}, \rho_{kl} \rangle = \frac{1}{n} \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

Esto es, el conjunto de n^2 funciones $\{\sqrt{n}\rho_{ij}\} \subset \mathbb{C}[G]$ es unitario.

(b) Si ρ' es otra representación irreducible compleja que no es equivalente a ρ, entonces todas sus componentes son ortogonales a todas las componentes de ρ.

Demostración. (a) Para toda $T \in \mathrm{End}(V)$ se define $\overline{T} := (1/|G|) \sum_g \rho(g) T \rho(g^{-1})$ y se verifica que $\overline{T}$ es G-equivariante, así que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{T} = \lambda \, id_V$ (Schur). Tomando la traza de ambos lados, $\mathrm{tr}(T) = \lambda n$, por lo que $\overline{T} = (\mathrm{tr}(T)/n) id_V$. Sea $v_1, \ldots, v_n$ una base unitaria de V y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ su base dual. Sea $E_{ij} \in \mathrm{End}(V)$ dada por $E_{ij}(v) = v_i \alpha_j(v)$ (E_{ij} correponde a $v_i \otimes \alpha_j$ bajo el isomorphismo canónico $\mathrm{End}(V) \simeq V \otimes V^*$). Luego $\{E_{ij}\}$ forma una base de $\mathrm{End}(V)$. Ahora se calcula que $\rho(g) E_{lj} = \sum_k \rho_{kl}(g) E_{kj}$, $E_{kj} \rho(g^{-1}) = \sum_i \bar{\rho}_{ij}(g) E_{ki}$, así que por un lado

$$\overline{E}_{lj} = \frac{\delta_{lj}}{n} id_V = \frac{\delta_{lj}}{n} \sum_k E_{kk} = \frac{\delta_{jl}}{n} \sum_{i,k} \delta_{ik} E_{ki}$$

y por el otro lado

$$\overline{E}_{lj} = \frac{1}{|G|} \sum_g \rho(g) E_{lj} \rho(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g,i,k} \bar{\rho}_{ij}(g) \rho_{kl}(g) E_{ki} = \sum_{i,k} \langle \rho_{ij}, \rho_{kl} \rangle E_{ki}.$$

Comparando coeficientes de E_{ki} en las últimas dos ecuaciones, $\langle \rho_{ij}, \rho_{kl} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}/n$.

(b) Para todo $T \in \mathrm{Hom}(V, V')$ se define $\overline{T} = (1/|G|) \sum_g \rho'(g) T \rho(g^{-1})$ y se verifica que $\overline{T}$ es G-equivariante, por lo que $\overline{T} = 0$. Luego, se fija bases $\{v_i\}, \{\alpha_j\}$ de V', V^* (resp.) y se define $E_{ij} \in \mathrm{Hom}(V, V')$ por $E_{ij} v := v_i \alpha_j(v)$. Al evaluar explicitamente la ecuación $\overline{E}_{lj} = 0$ se obtiene $\langle \rho_{ij}, \rho'_{kl} \rangle = 0$.

□

→**1.13.** Verificar con cuidado todos los detalles de la última demostración.

Definición. Sea (ρ, V) una representación compleja de un grupo G. El *caracter* de la representación es la función $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ dada por $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}[\rho(g)]$, donde $\mathrm{tr} : \mathrm{End}(V) \to \mathbb{C}$ es la traza (la suma de las entradas del diagonal de la matriz que representa a un $A \in \mathrm{End}(V)$ con respecto a una base de V).

→**1.14.** Demostrar:

- $\chi_\rho(e) = \dim V$.

- Si $g_1, g_2 \in G$ son elementos conjugados ($g_2 = gg_1g^{-1}$ para algun $g \in G$), entonces $\chi_\rho(g_1) = \chi_\rho(g_2)$.
- Los caracteres de representaciones equivalentes coinciden.
- $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.
- $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2}$.
- $\chi_{\rho^*}(g) = \chi_\rho(g^{-1})$.
- Si $H \subset G$ es un subgrupo, $\rho' = \rho|_H$, entonces $\chi_{\rho'} = \chi_\rho|_H$.

Nota: el converso de la tercera propiedad no es cierto. Por ejemplo, la representación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{C}^2$ dada por

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene el mismo caracter que la representación trivial en $\mathbb{C}^2$. Sin embargo, veremos más tarde que para grupos *finitos* (e incluso compactos) es cierto.

→**1.15.** Si un grupo G actua en un conjunto finito X y $(\rho, \mathbb{C}[X])$ es la representación de permutación asociada, entonces $\chi_\rho(g)$ es el número de puntos fijos de g en X.

Nota: este ejercicio se puede considerar como una respuesta (parcial) a la pregunta: qué significa, geomericamente, la traza de una transformacion lineal.

Corolarios de las relaciones de ortogonalidad de Schur. Para un grupo finito G:

(a) Una representación es irreducible ssi su caracter es un elemento unitario (de norma 1) en $\mathbb{C}[G]$.
(b) Dos representaciones irreducibles no son equivalentes ssi sus caracteres son ortogonales.
(c) Dos representaciones (no necesariamente irreducibles) son equivalentes ssi sus caracteres coinciden.
(d) El conjunto de caracteres de representaciones irreducibles forma un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{C}[G]$.
(e) El número de clases de equivalencias de representaciones irreducibles es finito, acotado por el número de las clases de conjugación en G.

→**1.16.** Demostrar estos corolarios.

<u>**Definición**</u>. Dados dos grupos G_1, G_2 con representaciones (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) (resp.) se define la representación $\rho_1 \boxtimes \rho_2$ ("el producto tensorial externo de ρ_1 y ρ_2") de $G_1 \times G_2$ en $V_1 \otimes V_2$ por $(\rho_1 \boxtimes \rho_2)(g_1, g_2) = \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2)$.

→**1.17.** Si G_1, G_2 son finitos entonces $\rho_1 \boxtimes \rho_2$ es irreducible ssi ρ_1, ρ_2 son irreducibles. (Sugerencia: calcula la norma del caracter de $\rho_1 \boxtimes \rho_2$.)

<u>**Ejemplo**</u>. Sean (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) dos representaciones del mismo grupo G y $\Delta : G \to G \times G$ dado por $\Delta(g) = (g, g)$. Entonces $\rho_1 \otimes \rho_2 = (\rho_1 \boxtimes \rho_2) \circ \Delta$ ("el producto tensorial de dos representaciones de un grupo G es la restricción de su producto tensorial externo al subgrupo diaganoal $\Delta(G) \subset G \times G$").

→**1.18.** Dados dos conjuntos finitos X_1, X_2, $\mathbb{C}[X_1 \times X_2] \cong \mathbb{C}[X_1] \otimes \mathbb{C}[X_2]$. Si dos grupos G_1, G_2 actuan en X_1, X_2 (resp.) define una acción de $G_1 \times G_2$ en $X_1 \times X_2$ y demuestra que la representación asociada en $\mathbb{C}[X_1 \times X_2]$ es isomorfa a $\mathbb{C}[X_1] \boxtimes \mathbb{C}[X_2]$.

→**1.19.** Dados dos grupos G_1, G_2 con representaciones (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) (resp.) se define una representación ρ de $G_1 \times G_2$ en $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ por $\rho(g_1, g_2)T = \rho_2(g_2)T\rho_1(g_1^{-1})$. Demuestra que esta representación es isomorfa a la representación $\rho_2 \boxtimes \rho_1^*$.

Definición. Consideramos la acción de $G \times G$ en G por translaciones por ambos lados; i.e. $(g_1, g_2) \cdot g = g_1 g g_2^{-1}$. Esto induce una representación de $G \times G$ en $\mathbb{C}[G]$ llamada la *representación regular*. La restricción de la representación regular a $G \times \{e\}$ (resp. $\{e\} \times G$) se llama la *representación regular izquierda* (resp. derecha).

Sea $\widehat{G}$ el conjunto de clases de equivalencia de representaciones irreducibles complejas de G. Para cada $\pi \in \widehat{G}$ sea

- ρ_π una representación en la clase π, en un espacio vectorial V_π de dimensión d_π;
- $\mathbb{C}[G]_\pi \subset \mathbb{C}[G]$ el suespacio generado por las componentes de ρ_π (con respecto a alguna base de V_π);
- χ_π el caracter de ρ_π.

→**1.20.** $\mathbb{C}[G]_\pi \subset \mathbb{C}[G]$ solo depende de π (y no de la representación particular (ρ_π, V_π), ni la base de V_π seleccionada).

Teorema (Peter-Weyl). Bajo la acción regular de $G \times G$ en $\mathbb{C}[G]$, cada $\mathbb{C}[G]_\pi \subset \mathbb{C}[G]$ es invariante e irreducible, isomorfo a $\mathrm{End}(V_\pi) \simeq V_\pi \boxtimes V_\pi^*$, y $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} \mathbb{C}[G]_\pi$.

Demostración. Para cada $\pi \in \widehat{G}$ se define $V_\pi \otimes V_\pi^* \to \mathbb{C}[G]$ por $v \otimes \alpha \to \alpha(\rho_\pi v)$ y se confirma que esto define un isomorphismo $G \times G$-equivariante $V_\pi \boxtimes V_\pi^* \simeq \mathbb{C}[G]_\pi$. Los subespacios $\mathbb{C}[G]_\pi$ son mutualmente ortogonales (las relaciones de ortogonalidad de Schur). Bajo la representación regular derecha $(\rho_R, \mathbb{C}[G])$, $\mathbb{C}[G]_\pi \simeq d_\pi V_\pi$, asi que para demostrar que $\mathbb{C}[G] = \oplus_\pi \mathbb{C}[G]_\pi$ basta demostrar que la multiplicidad de V_π en $\mathbb{C}[G]$ es d_π. Sea χ_R el caracter de ρ_R, entonces $\chi_R(g) = 0$ si $g \neq e$, $\chi_R(e) = |G|$. Asi que $\langle \chi_R, \chi_\pi \rangle = (1/|G|) \sum_g \bar{\chi}_R(g)\chi_\pi(g) = (1/|G|)\bar{\chi}_R(e)\chi_\pi(e) = d_\pi$. □

Corolarios.
(a) $|G| = \sum_\pi d_\pi^2$.
(b) $|\widehat{G}| = |G/conj|$ (el número de clases de conjugación de G).

Demostración. (a) Es inmediato. Para (b), nota primero que $|G/conj| = \dim(\mathbb{C}[G/conj])$ y que $\mathbb{C}[G/conj]$ se puede identificar con el subespacio $\mathbb{C}[G]^{conj} \subset \mathbb{C}[G]$ de *funciones de clase*, i.e. las funciones $f \in \mathbb{C}[G]$ invariantes bajo conjugacion, $f(yxy^{-1}) = f(x)$ (o más simple $f(xy) = f(yx)$.) Esto es justo el subespacio de $\mathbb{C}[G]$ fijo bajo la acción de conjugación de G. En cada $\mathbb{C}[G]_\pi \simeq \mathrm{End}(V_\pi)$ el subespacio fijo bajo conjugación es 1-dimensional (Schur), asi que $\dim(\mathbb{C}[G]^{conj|}) = |\widehat{G}|$. □

→**1.21.** Toda represenación irreducible del producto cartesiano de dos grupos finitos es isomorfa al producto externo de representaciones irreducibles de los factores.

<u>**Definición**</u>. Sea V un espacio vectorial complejo. El espacio vectorial conjugado $\overline{V}$ es el mismo conjunto de vectores pero la multiplicación por escalar (complejo) cambia: la nueva multiplicación por el escalar λ es la antigua multiplicación por el esacalar $\bar{\lambda}$. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces se denota por $\overline{T} : \overline{V} \to \overline{W}$ la *misma* función (y se verifique que sigue siendo lineal como transformación lineal $\overline{V} \to \overline{W}$.) Si (ρ, V) es una representación compleja se denota por $(\overline{\rho}, \overline{V})$ la representación $\overline{\rho}(g) = \overline{\rho(g)}$.

→**1.22.** Si $e_1, \ldots, e_n$ es una base para V entonces es tambien base para $\overline{V}$. Si A es la matriz de una $T \in \mathrm{End}(V)$ con respecto a esta base entonces la matriz de $\overline{T}$, con respecto a la misma base, es $\overline{A}$ (conjugando todas las entradas de la matriz A).

→**1.23.** $\chi_{\overline{\rho}} = \overline{\chi_\rho}$.

→**1.24.** Una representación unitaria satisface $\overline{\rho} \sim \rho^*$.
Sugerencia: el isomorfismo está dado por $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$.

(Actualizado: 15 de febrero de 2020).