Notas núm. 1

Los ejercicios estan marcados con flecha $\to$.

Definición. Una representación (lineal) de un grupo G en un espacio vectorial V sobre algun campo k es un homomorfismo $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, donde $\mathrm{GL}(V)$ es el grupo de las transformaciones k-lineales invertibles $V \to V$. La dimensión (o grado) de la representación es la dimensión de V. La representación es de dimensión finita (compleja, real, etc.) si V es un espacio vectorial de dimensión finita (compleja, real, etc.).

Las representaciones que vemos en este curso, sobre todo al principio, son típicamente complejas y de dimensión finita.

$\to$**1.1.** Para toda transformación lineal invertible $A \in \mathrm{GL}(V)$ existe una única representación lineal (ρ, V) del grupo $G = \mathbb{Z}$ tal que $\rho(1) = A$.

$\to$**1.2.** Una transformación lineal invertible $A \in \mathrm{GL}(V)$ define un representación de $\mathbb{Z}_n$ mediante la fórmula $\rho([1]) = A$ si y solo si $A^n = id_V$.

Definición. Dos representaciones (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) (sobre el mismo campo) de un grupo G son *equivalentes* (o *isomorfas*), $\rho_1 \sim \rho_2$, si existe un isomorfismo lineal $T : V_1 \to V_2$ tal que $\rho_1(g) \circ T = T \circ \rho_2(g)$ para todo $g \in G$. (Decimos que tal T es G-equivariante).

$\to$**1.3.** En el ejemplo del 1er ejercicio, $A_1, A_2 \in \mathrm{GL}(V)$ definen representaciones equivalentes de $\mathbb{Z}$ si y solo si A_1, A_2 son elementos conjugados del grupo $\mathrm{GL}(V)$.

$\to$**1.4.** Encuentra el número de clases de equivalencia de representaciones complejas de dimensión ≤ 3 de los grupos $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$.

$\to$**1.5.** Sean (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) dos representaciones de dimensión finita sobre el mismo campo de un grupo G. Demuestra que las representaciones son equivalentes si y solo si existen bases B_1, B_2 en V_1, V_2 (resp.) tal que ρ_1, ρ_2 están representadas por las mismas matrices (para todo $g \in G$, $[\rho_1(g)]_{B_1} = [\rho_2(g)]_{B_2}$).

$\to$**1.6.** Sea $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\omega = e^{2\pi i/n}$ y $\rho_l : \mathbb{Z}_n \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, dada por $\rho_l([k]) = \omega^{kl}$, $0 \leq k, l \leq n-1$. Demuestra que $\rho_0, \ldots, \rho_{n-1}$ son n representaciones complejas de $\mathbb{Z}_n$ de dimensión 1, no equivalentes entre sí.

$\to$**1.7.** Toda representación lineal compleja de dimensión 1 de $\mathbb{Z}_n$ es equivalente a una única de las ρ_l, $0 \leq l < n$.

Nota: dentro de poco veremos que las ρ_l son las únicas representaciones irreducibles complejas de $\mathbb{Z}_n$ y que toda representación lineal compleja de $\mathbb{Z}_n$ es equivalente a una suma directa de ellas.

Muchos de los conceptos básicos de álgebra lineal tienen su análogo en la teoría de representaciones lineales de grupos. Van algunos ejemplos.

Definición. Una *subrepresentación* de una representación (ρ, V) de un grupo G es un subespacio vectorial G-invariante $V_1 \subset V$ ($\rho(g)v \in V_1$ para todo $g \in G$ y $v \in V_1$). Dado tal subespacio invariante, se define en V_1 un representación (ρ_1, V_1) de G por $\rho_1(g)v = \rho(g)v$ para todo $g \in G$, $v \in V_1$.

Definición. Dada una representación (ρ, V) de un grupo G, la representación *dual* (ρ^*, V^*) está dada por $\rho^*(g) := [\rho(g^{-1})]^*$.

→**1.8.** Verifica que la representación dual es una representación, i.e. que $\rho^*(g) \in \mathrm{GL}(V^*)$ para todo $g \in G$ y que $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ es un homomorfismo (esto explica la inversa g^{-1} introducida en la definición de ρ^*).

→**1.9.** Para las representaciones ρ_l de $\mathbb{Z}_n$, $0 \leq l < n$, demuestra que $(\rho_l)^* \sim \rho_{n-l}$.

Definición. La suma directa de dos representaciones (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) es la representación $(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$, dada por $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) := \rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$.

→**1.10.** Dada una $A \in \mathrm{GL}(V)$, A es diagonalizable si y solo si la reprepresntación inducida de $\mathbb{Z}$ en V es equivalente a la suma directa de subrepresentaciones de dimensión 1.

→**1.11.** Toda representación lineal compleja de dimensión finita de $\mathbb{Z}_n$ es equivalente a suma directa de representaciones de dimensión 1. (Sugerencia: ver más adelante el concepto de representación unitaria).

→**1.12.** Definimos una representación de $\mathbb{Z}_3$ en $\mathbb{C}^3$ por $\rho([1])(z_1, z_2, z_3) = (z_2, z_3, z_1)$. Demuestra que esta fórmula define una representación de $\mathbb{Z}_3$ y encuentra una descomposición de esta representación en la suma directa de 3 subreprsentaciones de dimensión 1.

Definición. Una representación (ρ, V) de un grupo G es *irreducible* si los únicos subespacios G-invariantes de V son todo V y el subespacio nulo.

Ejemplo. Toda representación de dimensión uno es irreducible.

→**1.13.** La representación "obvia" de $\mathrm{GL}(V)$ en V, $\rho(g) = g$, es irreducible.

→**1.14.** La representación "obvia" de U_n (matrices unitarias) en $\mathbb{C}^n$ es irreducible.

Lema de Schur. Si (ρ, V) es una representación compleja irreducible y $T : V \to V$ es una transformación lineal G-equivariante, i.e. $T \circ \rho(g) = \rho(g) \circ T$ para todo $g \in G$, entonces T es un múltiplo de la identitad, $T = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

▷ Sea λ un valor propio de T. Entonces $W := Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ y es G-invariante, así que $W = V$. □

Corolario. Toda representación compleja irreducible de un grupo abeliano es de dimensión 1.

▷ Para todo $g \in G$, $\rho(g)$ es G-equivariante, así que, por Schur, un múltiplo de la identidad. Así que todo subespacio de V es G-invariante, por lo que V debe ser 1 dimensional. □

Definición. El producto tensorial de dos representaciones (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) es la representación $(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$, dada por $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) := \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$.

→**1.15.** Para las representaciones ρ_l de $\mathbb{Z}_n$, $\rho_l \sim \rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_1$ (l veces).

→**1.16.** Sean $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ dos representaciones de un grupo G. Se define $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ como el espacio de todas transformaciones lineales $V_1 \to V_2$ con $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}(V_1, V_2))$ dado por $\rho(g)T = \rho_2(g)T\rho_1(g^{-1})$. Demuestra que $(\rho, \mathrm{Hom}(V_1, V_2))$ es una representación y que es equivalente a $(\rho_1^* \otimes \rho_2, V_1^* \otimes V_2)$.

→**1.17.** Sean $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ dos representaciones irreducibles complejas y $T : V_1 \to V_2$ una transformación lineal G-equivariante. Si V_1 y V_2 son equivalentes, o sea existe un isomorfismo G-equivariante $T_0 : V_1 \to V_2$, entonces $T = \lambda T_0$, para algun $\lambda \in \mathbb{C}$. Si V_1, V_2 no son equivalentes entonces $T = 0$.

→**1.18.** Cierto o Falso: el producto tensorial de dos representaciones irreducibles es irreducible.

(Sugerencia: considera el cuadrado tensorial de la representación estandar de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.)

→**1.19.** Encontrar un ejemplo de una representación que no es irreducible pero que no es la suma directa de irreducibles.

(Sugerencia: considera la tranformación lineal en $\mathbb{C}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, y)$.)

→**1.20.** La representación dual a una representación irreducible es irreducible.

→**1.21.** Sea V una representación compleja de un grupo. Demuestra:

(a) la representación $V \oplus \cdots \oplus V$ (m veces) es isomorfa a la representación $V \otimes \mathbb{C}^m$, donde $\mathbb{C}^m$ es la repersentación trivial.

(b) $T \in \mathrm{End}(V \otimes \mathbb{C}^m)$ es G-equivariante si y solo si $T = id_V \otimes A$, con $A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^m)$.

(Sugerencia: sea $e_1, \ldots, e_m$ la base canónica de $\mathbb{C}^m$, $\pi_i : V \otimes \mathbb{C}^m \to V$ y $\nu_j : V \to V \otimes \mathbb{C}^m$ dadas por $\pi_i : \sum v_j \otimes e_j \mapsto v_i$, $\nu_j : v \mapsto v \otimes e_j$. Demuestra que π_i, ν_j son G-equivariantes para todo i, j. Si T es G-equivariante entonces, por Schur, $\pi_i \circ T \circ \nu_j = a_{ij} id_V$ para algun $a_{ij} \in \mathbb{C}$, por lo que $T = id_V \otimes A$, donde $A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^m)$ es la transformación lineal con matriz (a_{ij}).)

→**1.22.** Para una representación V de un grupo G se denota por $\mathrm{End}_G(V)$ el espacio de los endomorfismos de V que son G-equivariantes. Así que el lema de Schur afirma que para V irreducible compleja $\mathrm{End}_G(V) = \mathbb{C} id_V$ (los múltiplos complejos del endomorfismo identidad de V). Demuestra la siguiente generalización del lema de Schur: si $V_1, \ldots, V_k$ son representaciones irreducibles complejas distintas (i.e. no isomorfas en pares) y $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ entonces $\mathrm{End}_G(\bigoplus_i V_i \otimes \mathbb{C}^{m_i}) = \bigoplus_i [id_{V_i} \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^{m_i})]$.

→**1.23.** Se define una representación de $\mathbb{Z}_n$ en $\mathbb{C}^n$ en donde [1] actua por $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, \ldots, x_n, x_1)$. Demuestra que esta fórmula define una respresentación que se descompone como suma directa de subrepresentaciones $\mathbb{C}^n = V_0 \oplus \cdots \oplus V_{n-1}$, donde cada V_i es equivalente a $(\rho_i, \mathbb{C})$. Encuentra explicitamente los subespacios $V_i \subset \mathbb{C}^n$.

(Sugerencia: let $\omega = e^{2\pi i/n}$ y $v_i = (\omega^i, \omega^{2i}, \ldots, \omega^{ni})$, $i = 0, \ldots, n-1$.)

→**1.24.** Una aplicación divertida del ejercicio anterior. Se toma un polígono con n vértices y se asigna una "carga" a cada vértice (un número real). Luego se define una nueva distribución de cargas al sustituir cada carga por el promedio de sus dos vecinas. Estudia el comportamiento de este proceso al iterarlo muchas veces.

(Sugerencia: cada distribución de cagas determina un vector $v \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. Tomar el promedio de los vecinos define una transformación $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, $\mathbb{Z}_n$-equivariante con respecto a la representación definida en el ejercicio anterior. Por Schur, T actua en cada uno de los V_i por un escalar λ_i. Determina los λ_i y observa que si $|\lambda_i| < 1$ entonces $\lim_{k\to\infty}(\lambda_i)^k = 0$. Nota también que los casos de n par e impar son distintos.)

Definición. Una representación compleja (ρ, V) de un grupo G es *unitaria* si existe en V un producto hermitiano G-invariante. O sea, existe una función $h : V \times V \to \mathbb{C}$, lineal en la primera entrada, anti-lineal en la segunda, simétrica conjugada, positiva definida, y tal que $h(\rho(g)v_1, \rho(g)v_2) = h(v_1, v_2)$ para todo $g \in G, v_1, v_2 \in V$.

Proposición. Toda representación unitaria de dimensión finita es completamente reducible, i.e. es la suma directa de subrepresentaciones irreducibles.

$\triangleright$ Por inducción sobre la dimensión de la representación. Si $W \subset V$ es un subespacio invariante, entonces su complemento ortogonal tambien lo es. $\square$

Teorema. Toda representación compleja de dimensión finita de un grupo finito es unitaria.

$\triangleright$ Sea h_0 cualquer producto hermitiano en V. Se puede verificar que

$$h(v_1, v_2) := \sum_{g\in G} h_0(\rho(g)v_1, \rho(g)v_2)$$

es un producto hermitiano G-invariante. $\square$

$\to$**1.25.** Verifica los detalles de la última demostración.

Corolario. Toda representación compleja de dimensión finita de un grupo finito es la suma directa de subrepresentaciones irreducibes.

Corolario. Toda representación compleja de dimensión finita de un grupo finito abeliano es la suma directa de representaciones unidimensionales (ver ejercicio **1.11**).

(Actualizado: 1 de febrero de 2020).