Metas/proyectos final de curso

(1) Clasificación de repns irred de S_d por diag. de Young. — Edwin + David

$$\lambda \rightsquigarrow c_\lambda = a_\lambda b_\lambda \rightsquigarrow V_\lambda = \left(\mathbb{C}[S_d]\right) c_\lambda$$

P.D. 1.1 $\lambda \mapsto V_\lambda$ es una biyeccion

Edwin + David $\left\{ \begin{array}{c} \text{diag.} \\ \text{de Young} \end{array} \right\} \leftrightarrow \widehat{S_d}$

1.2* $\dim V_\lambda = \dfrac{d!}{\prod h}$

— Fulton-Harris

(2) $\boxed{\text{Dualidad Schur-Weyl}}$ ← Edgar + Juan + Rocio

$$V = \mathbb{C}^n, \quad U = V^{\otimes d} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{d \text{ veces}}$$

Bajo $GL(V) \times S_d$

$$U = \bigoplus_\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ GL(V)\text{-irred.}}}{\mathbb{S}_\lambda U} \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ S_d\text{-irred}}}{V_\lambda}, \quad \mathbb{S}_\lambda U = U c_\lambda$$

P.D. 2.1. el subalg. de $\mathrm{End}(U)$ B
generado por $GL(V)$
es el centralizador de A
la acción de S_d

2.2 Sean $A, B \subset \mathrm{End}(U)$
(lo que tenemos en mente, $A := \mathrm{Span}$ (acción de S_d en U)

$B :=$ - - - - $GL(V)$

tal que • A es semi-simple
• $B =$ el centralizador de A en $\mathrm{End}(U)$

$\Rightarrow$ $U = \bigoplus W_\lambda \otimes V_\lambda$, V_λ rep'n irred de A
W_λ - - - - . B

"Alegbras" = algebras asociativas con unidad
(esp. vect con producto, bineal, asociativo)
no nec. conmutativo

ejemplo:

- $\mathrm{End}(W)$, W = esp. vect.

e.g. $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, si $W=\mathbb{C}^n$.

- $\mathbb{C}[G]$ = el álg de un grupo finito $=\{\sum_{g\in G} c_g\, g \mid c_g\in\mathbb{C}\}$

- $U\mathfrak{g}$ el algebra asoc. universal de un alg. de Lie

e.g. $\mathfrak{sl}_2 = \mathrm{span}\{H, X, Y\}$ $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}$

$$\bigoplus_{d\geq 0} \mathfrak{g}^{\otimes d} \Big/ v\otimes w - w\otimes v \sim [v,w]$$

- $\rho : G \to \mathrm{End}(W)$ una rep'n

$A = \mathrm{span}\big(\rho(G)\big) \subset \mathrm{End}(W)$ es un alg asoc.

lineal

subalg: $\left(\sum a_i \rho(g_i)\right)\left(b_j \rho(g_j)\right) = \sum a_i b_j \, \rho(g_i g_j)$

Hecho: (obvio) ρ es irred $\iff$ W es A simple (=irred)

- $A \subset \mathrm{End}(W)$, $A' = \{ b \in \mathrm{End}(W) \mid ab = ba \ \forall a \in A \}$ ✓

$A' = B$

$(b_1 b_2) a = b_1 (b_2 a) = b_1 a b_2 = a b_1 b_2.$

Lema de Schur: Si W es G-irred,

$A = \mathrm{span}\ \rho(G) \subset \mathrm{End}(W)$

$A' = \mathbb{C}\,\mathrm{Id}$ | $A' = \mathrm{End}_G(W)$

Ej: ① W irred $\iff$ $A = \mathrm{End}(W)$.

② $W = \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} W_\lambda \otimes \mathbb{C}^{n_\lambda}$

$\Rightarrow A' = \mathrm{End}_G(W) = \bigoplus_\lambda \mathrm{Id}_{W_\lambda} \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n_\lambda})$

<u>Def:</u> alg. asoc. semi-simple

equiv. $\updownarrow$

- toda rep (de dim finita) es la suma directa de irred. (="simples")
- suma directa $A = \bigoplus_i \mathrm{End}(W_i)$

<u>E.g.</u> $\mathbb{C}[G]$ es s.s. pq — promediar / — P-W

P.W: $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \mathrm{End}(V_\lambda)$

Porqué el centralizador de $A \subset \mathrm{End}(V^{\otimes d})$ & el alg. gen. por la acción S_d es el alg. generado por la acción de $GL(V)$?

6

Ej: $S^d(W)$ está generado por

polar

$$\{ \underbrace{w \otimes \cdots \otimes w}_{d \text{ veces}} \mid w \in W \}$$

$$W \mapsto S^d(W)$$

$$w \longmapsto w \otimes \cdots \otimes w$$

d=2 $e_1, e_2, \ldots$ base de W,

prod. sim $\rightarrow$ $e_i e_j$ base de $S^2(W)$

$e_1 e_2 =$ comb. lin. de cuadrados?

$$(e_1+e_2)^2 = e_1^2 + e_2^2 + 2e_1 e_2$$

$$e_1 e_2 = \frac{(e_1+e_2)^2 - e_1^2 - e_2^2}{2} \qquad \blacksquare$$

d=3: $e_1 e_2 e_3 = \sum (\text{cuad}) \cdot e_3$

$\underset{\text{ind.}}{\Longrightarrow}$ $e_1^2 e_2 \equiv 0$ mod cubos.

$$(e_1+e_2)^3 = e_1^3 + e_2^3 + 3e_1^2e_2 + 3e_1e_2^2$$

$$(e_1-e_2)^3 \equiv \cancel{e_1^3 + e_2^3} \cancel{+} 3e_1^2e_2 + 3e_1e_2^2$$

$$6e_1^2e_2 \equiv 0 \mod \text{cubos}.$$

---

cor: 2.1 $\quad \mathrm{End}(V^{\otimes d}) = V^{\otimes d} \otimes (V^{\otimes d})^* =$

$$= \underbrace{(V \otimes V^*) \otimes (V \otimes V^*) \otimes \cdots}_{d \text{ veces}}$$

$$= (\mathrm{End}\, V)^{\otimes d} \Rightarrow$$ los elem de $\mathrm{End}(V^{\otimes d})$ que conmutan S_d son $\boxed{S^d(\mathrm{End}\, V)}$

$\|$ ej.

$\mathrm{Span}\{\underbrace{g \otimes \cdots \otimes g}_{d \text{ veces}} \mid g \in \mathrm{End}\, V\}$

- - - - - - - - -

$$\mathrm{End}_G(W) = (\mathrm{End}(W))^G$$

$$T \mapsto \rho(g)\, T\, \rho(g^{-1})$$

$$W \otimes W^*$$

② usa en F-H

la const. $W \otimes_A U$ = Qué onda con este objeto ?!

$$U = V^{\otimes d}$$

W = una rep. irred.

A = imagen de $\mathbb{C}[S_d]$ en $\mathrm{End}(U)$.

Jueves