Teoría rep'ns 24/3/2020

Repaso: meta descomp. $C(S^2) \overset{?}{=} \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m$

bajo SO_3 $\quad \dim H_m = 2m+1$

A_m = pol homog / $\mathbb{C}$ de grado m en $\mathbb{R}^3$

$p(x) = \sum a_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k$, $i+j+k=m$.

$$A_{m-2} \underset{\Delta}{\overset{r^2}{\rightleftarrows}} A_m$$

r^2 = multi. por $x_1^2+x_2^2+x_3^2$

$\Delta = \sum \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$

Op. adjuntos $\Rightarrow A_m = H_m \oplus r^2 A_{m-2}$

$= H_m \oplus r^2 H_{m-2} \oplus r^4 H_{m-4} \oplus \cdots$

$\#$ sumand. $= \left[\frac{m}{2}\right] + 1$

Prop: es una descomp. en irreducibles

Dem: usamos prob 1 de la vez pasada

$G/H = X$

$V \subset C[X]$ $\quad G$-inv.

$\Rightarrow \exists\, f \in V$, H-fijo, $f \neq 0$.

Cor: $\#$ sumand. en descomp. de V (en irred.) $\leq \dim(V^H)$

subesp. de vect. H-fijos.

$$S^2 = SO_3 / SO_2 \qquad SO_2 = \mathrm{Stab}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\overset{\shortparallel}{h}, \quad z = e^{it}$$

Descomp. A_m bajo SO_2

(lema 4 [V])

$$\mathbb{R}^3 = \underset{\substack{\uparrow\\ w = x_1 + i x_2}}{\mathbb{C}} \oplus \underset{\substack{\nwarrow\\ x_3}}{\mathbb{R}} \ni (w, x_3) \overset{h}{\longmapsto} (zw, x_3)$$

$$u(w, x_3) = \bar{w} \overset{h}{\longmapsto} u(h^{-1}(w, x_3)) = u(\bar{z}w, x_3) =$$
$$= x_1 - i x_2 \qquad\qquad = \overline{\bar{z}w} = z\bar{w} = z u(w, x_3)$$

$$h \cdot u = z u$$
$$h \cdot \bar{u} = \bar{z}\bar{u}$$

ej. **Hecho 1** $\{ u^p \bar{u}^q x_3^r \mid p+q+r = m \}$ es una base de A_m, de eigenvectores de h c.u. de e.valor z^{p-q}

ej. Hecho 2: son exactamente $\left[\frac{m}{2}\right] + 1$ monomios del tipo $u^p \bar{u}^p x_3^r$, $2p + r = m$. ∎

Def: $H_m|_{S^2} \subset C(S^2)$ son los armónicos esféricos de grado m en S^2

$\uparrow$ dim $2m+1$.

Falta

- Base de H_m de e.vect. de $SO_2 \ni H_m$

$$\{ Y_{m,\ell} \}, \quad \ell = m, m-1, \ldots, 0, -1, \ldots, -m$$

- encontrar fórmulas explícitas para las $Y_{m,\ell}$

• $\Delta_{S^2}(f|_{S^2}) = [\Delta_{\mathbb{R}^3}(f)]\big|_{S^2} + (\text{const})\, f|_{S^2}$

$\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, $\Delta_\Sigma(f|_\Sigma) = [\Delta_{\mathbb{R}^3}(f)]\big|_\Sigma + (\text{const}) H \cdot f$

$\uparrow$ curv. media

$f \in H_m$, $\Delta_{S_2}(f|_{S^2}) = (\text{const}) \cdot (f|_{S^2})$

$\Rightarrow$ H_m es esp. de eigen vect. de Δ_{S^2}.

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{S^2} : C^\infty(S^2) & \to & C^\infty(S^2), \ SO_3 \\ \cup & & \\ H_m & \xrightarrow{\lambda_m} & H_m \quad (\text{Schur}) \end{array}$$

• $f : S^2 \to \mathbb{C}$, $(\Delta_{S^2} f)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = ?$

• $C(S^2) = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots$

$0 = \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$

es la descomp. en los eigen-espacios de

Δ_{S^2}

Fin de clase