Teoría de rep'ns: clase de 19 mar 2020 (en línea)

Prob (1) $G \circlearrowright X$, $V \subset C(X)$, subesp inv.

$g: f(x) \mapsto f(g^{-1}x)$, $g \in G$

$H = Stab(o)$, $o \in X$, $X = G/H$.

<u>P.D.</u> $\exists f \in V$, $f \neq 0$, $h \cdot f = f$, $\forall h \in H$.

<u>David</u>: $\exists f \in V$, $f(o) \neq 0$. $V \neq \{0\}$.

("oh" → o, cero → 0)

$\Rightarrow f \in V$, $x \in X$ t.q. $f(x) \neq 0$.

$\exists g \in G$ t.q. $g(x) = o$. $\Rightarrow g^{-1} f(o) \neq 0$.

$\Rightarrow \exists f \in V$, $f(o) \neq 0$. $V_0 = \{f \in V \mid f(o) = 0\}$

$\Rightarrow V_0 \subset V$ tiene codim $= 1$

$\varphi: V \to \mathbb{C}$, $\varphi(f) = f(o)$

$\Rightarrow \varphi \neq 0 \Rightarrow Ker(\varphi)$ es codim $= 1$

V_0 es H-inv $\Rightarrow V_0^{\perp} = \mathbb{C} f_0$ es H-inv

$h \cdot f_0 = \lambda f_0$, $\lambda = ?$

$$(h \cdot f_0)(o) = f_0(h^{-1} o) = f_0(o)$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$(\lambda f_0)(o) = \lambda f_0(o) \rightarrow \lambda = 1. \text{ QED.}$$

Prob. 2

$G \curvearrowright X$, $H = \mathrm{Stab}(o)$, $o \in X$,
$G \curvearrowright V$ irred, $v_0 \in V$, $v_0 \neq 0$
$h \cdot v_0 = v_0$, $\forall h \in H$.

P.D.: $\exists$ isom. $V \hookrightarrow C(X)$ G-equiv.

Edwin: $\exists \varphi \in V^*$, H-fija, $\varphi \neq 0$.

Dem.: $\exists \tilde{\varphi} \in V^*$, $\tilde{\varphi}^*(v_0) = 1$, $\ker \tilde{\varphi}^* = v_0^{\perp}$.

$$\varphi(v) := \int_H \tilde{\varphi}(h \cdot v)\, dh \Rightarrow \varphi \text{ es H-fijo}$$

$$\varphi(v_0) = 1 \quad \left(= \int \tilde{\varphi}(h v_0)\, dh = \int \tilde{\varphi}(v_0) = \tilde{\varphi}(v_0) = 1 \right)$$

Se define $\Phi : V \to C(X)$;

$$\Phi(u)(x) = \varphi(g^{-1} u), \quad x = g \cdot o$$

$$\Phi(v_0)(o) \underset{g=e}{=} \varphi(v_0) = 1 \ (\neq 0)$$

$\Rightarrow \Phi \neq 0 \Rightarrow \Phi$ iso sobre $\mathrm{im}(\Phi)$ (Schur)

otra: $\tilde{\Phi} : V \to C(G)$

$$\Phi(u)(g) := \varphi(g^{-1} u).$$

$G \to G/H = X$, $\quad gH \mapsto g \cdot o$

$C(X) \hookrightarrow C(G)$

la imagen las func. q' son H-inv

La imag. de $C(X)$ en $C(G)$ son las func. H-inv (por la derecha)

QED.

$A_0 = \mathbb{C}$, $A_1 = \{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \mid a_i \in \mathbb{C}\} \overset{SO_3\text{-rep}}{=} (\mathbb{R}^3)^* \otimes \mathbb{C}$

Def: Sea $A_d :=$ pol en $\mathbb{R}^3$ de grado d con coef. en $\mathbb{C}$ $= \left\{ \sum a_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k \;\middle|\; \begin{array}{l} i+j+k=d \\ a_{ijk} \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$

- $SO_3 \curvearrowright A_d$: $p(x) \mapsto p(g^{-1}x)$, $g \in SO_3$.
- Se define prod. herm. en A_d
  - los monomios son una base ortogonal (no unitaria), $\|x_1^i x_2^j x_3^k\|^2 = i!\,j!\,k!$
- mult. por $x_i : A_d \to A_{d+1}$, $i = 1, 2, 3$.

  $\partial_{x_i} : A_{d+1} \to A_d$, $p(x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} p(x)$

__Lemma:__ son operaciones __adjuntas__ (duales)

$$\boxed{\langle x_i\, p(x), q(x) \rangle = \langle p(x), \partial_{x_i} q(x) \rangle}$$

__Dem:__ $\langle x_1\, x_1^i x_2^j x_3^k,\ x_1^{i+1} x_2^j x_3^k \rangle = (i+1)!\,j!\,k!$

$\langle x_1^i x_2^j x_3^k,\ \partial_{x_1} x_1^{i+1} x_2^j x_3^k \rangle =$

$= (i+1) \| x_1^i x_2^j x_3^k \|^2 = (i+1)\, i!\, j!\, k!$ ■

(es el operador de mult. por esta función) $r^2 := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $\Delta = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i^2} =$ __el laplaciano__

$\overset{\text{lema}}{\Longrightarrow} \boxed{\Delta^* = r^2}$

$\boxed{\Delta f = 0}$

$\boxed{\Delta f = \lambda f}$

__SO_3-equiv:__ $A_d \underset{\Delta}{\overset{r^2}{\rightleftarrows}} A_{d+2}$

eg

$\boxed{H_d} := \operatorname{Ker}(\Delta) \subset A_d$ (polinomios __armónicos__)

$\uparrow$ $\nwarrow \approx V_{2d}$

$\dim = 2d+1$

④ $A_0 \overset{r^2}{\hookrightarrow} A_2 \overset{r^2}{\hookrightarrow} A_4 \overset{r^2}{\hookrightarrow} A_6 \overset{r^2}{\to} \cdots$

$$\begin{matrix} A_0 & A_2 & A_4 & A_6 \\ \parallel & \cup & \cup & \cup \\ H_0 & H_2 & H_4 & H_6 \\ \parallel & & & \\ \mathbb{C} & & & \end{matrix}$$

$\boxed{A_2 = H_2 \oplus r^2\mathbb{C}}$ ④

$\mathrm{Im}(r^2)^\perp = \ker(\Delta)$

---

repaso alg. lin.

$\mathrm{Im}(T)^\perp = \ker(T^*)$ $\quad T: V \to W$

$V \overset{T}{\underset{T^*}{\rightleftarrows}} W$ $\quad T^*: W \to V$

$0 = \langle Tv, w\rangle = \langle v, T^* w\rangle$

$\forall v \Rightarrow T^* w = 0$

$A_d \overset{r^2}{\to} A_{d+2} \overset{r^2}{\to} A_{d+4}$

$A_{d+2} = r^2 A_d \oplus H_d$ $\quad A_{d+4} = r^2 A_{d+2} \oplus H_{d+2}$

$\Rightarrow \mathbb{C} = A_0 \overset{r^2}{\hookrightarrow} \mathbb{C}r^2 \oplus H_2 \overset{r^2}{\hookrightarrow} \mathbb{C}r^4 \oplus r^2 H_2 \oplus H_4$

$A_0 = H_0 \quad \cdots\cdots \hookrightarrow \mathbb{C}r^{2n} \oplus r^{2n-2} H_2 \oplus \cdots \oplus H_{2n}$

Prop: $A_d = H_d \oplus r^2 H_{d-2} \oplus \cdots \oplus \begin{cases} r^{\bullet} H_1 & d \text{ par} \\ r^{\bullet} H_0 & d \text{ impar} \end{cases}$

① es la descomposición de A_d en subesp. $\boxed{\text{irred}}$ bajo SO_3 a A_d.

⇓

② $\dim H_d = 2d+1$

③ $A_d(\mathbb{R}^3) \to C(S^2)$ (restricción) es injectivo. (fácil)

Prox. clase (usando ej. 1+2 de hoy).

(Fin de la clase).