Representaciones de S_d

David Cuevas & Edwin López
Centro de Investigación en Matemáticas A. C.

28 de mayo de 2020

EL TEOREMA

Teorema

Para cada partición $\lambda \in P(d)$

- V_λ *es una representación irreducible.*
- *Si* $\lambda \neq \mu$, *particiones, entonces* $V_\lambda \neq V_\mu$.

Observación:

clases de conjugación $\leftrightarrow$ *particiones* $\leftrightarrow$ *Diagramas de Young* $\leftrightarrow$ *Tableau* $\longmapsto$ *representación*

Acción en las Tableau

Para un Tableau T y un $\sigma \in S_d$, definimos σT como el Tableau que se obtiene de T aplicando σ a los dígitos en T.

Ejemplo

$$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \sigma = (132)(45), \quad \sigma T = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Lema

Sea $T' = gT$, y sea $\sigma \in S_d$. Si consideramos σT como obtenida a través de T moviendo las entradas de una posición a otra, este mismo conjunto de movimientos cambiará T' en $g\sigma g^{-1}T'$.

Acción en las Tableau

Ejemplo

$g = (135)$, $\sigma = (132)(45)$, $g\sigma g^{-1} = (14)(235)$

$$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad T' = gT = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 5 & 4 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$\sigma T = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad g\sigma g^{-1}T' = \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Corolario

$P(gT) = gP(T)g^{-1}$, $Q(gT) = gQ(T)g^{-1}$, $a_{gT} = ga_T g^{-1}$, $b_{gT} = gb_T g^{-1}$, $c_{gT} = gc_T g^{-1}$

Resultados preliminares.

Lema (1)

(1) Para todo $p \in P$, $p \cdot a = a \cdot p = a$.
(2) Para todo $q \in Q$ sign$(q)q \cdot b = b \cdot$sign$(q)q = b$.
(3) Para todo $p \in P, q \in Q$ $p \cdot c \cdot ($sign$(q)q) = c$ y c es el único elemento en $A = \mathbb{C}[S_d]$ con esa propiedad salvo un múltiplo escalar.

Dem: Recordemos que $a = \sum_{\sigma \in P} \sigma$, $b = \sum_{\tau \in Q} \text{sign}(\tau)\tau$
Así, como Q es un subgrupo de S_d

$$\begin{aligned} \text{sign}(q)q \cdot b &= \sum_{\tau \in Q} \text{sign}(q)q \cdot \text{sign}(\tau)\tau \\ &= \sum_{\tau \in Q} \text{sign}(q \cdot \tau)q \cdot \tau = b \end{aligned}$$

Para (3): Supongamos que $x = \sum_{\sigma \in S_d} n_\sigma \sigma \in A$ cumple la propiedad. Se tiene

$$p \cdot x \cdot (\mathsf{sign}(q) q) = \sum_{\sigma \in S_d} \mathsf{sign}(q) n_\sigma p \sigma q = \sum_{\sigma \in S_d} n_\sigma \sigma$$

$\Longrightarrow$

$$n_{p\sigma q} = \mathsf{sign}(q) n_\sigma .$$

En particular, $n_{pq} = \mathsf{sign}(q) n_e$.

Por otro lado, $P \cap Q = e$ implica que un elemento en S_d se pude escribir a lo más de una manera como $p \cdot q$ con $p \in P, q \in Q$. Así que

$$c = \sum_{p \in P, q \in Q} \mathrm{sign}(q) pq.$$

Notemos que para probar que $\sum_{\sigma \in S_d} n_\sigma \sigma = x$ es un múltiplo de c es suficiente probar que $n_g = 0$ si $g \notin PQ$ (el escalar será n_e).
Tomemos $g \notin PQ$. Basta encontrar una transposición t tal que $p = t \in P$ y $g^{-1} t g = q \in Q$, pues en este caso

$pgq = tgg^{-1}tg = g \Longrightarrow n_g = n_{pgq} = \mathsf{sign}(q)n_g = -n_g.$

- Existen dos números distintos en el mismo renglón de T y en la misma columa de T'.

Si t es la trasposición de esos dos números, entonces $t \in P = P(T)$ y $t \in Q(T') = Q(gT) = gQ(T)g^{-1}$. Por tanto, $t \in P$ y $g^{-1}tg \in Q$.

- Si no existieran, podemos encontrar $p_1 \in P$ y $q'_1 \in Q' = gQg^{-1} = Q(gT) = Q(T')$ tal que p_1T y q'_1T' tienen el mismo primer renglón.
- Repitiendo el proceso, existen $p \in P$ y $q' \in Q'$ tales que $pT = q'T' = q'gT$
- Por lo tanto, $g = (q'g)(g^{-1}q'^{-1}g) = pq$, $p \in P, q \in Q$.

Lema (2)

Para todo $x \in A$, $c_\lambda \cdot x \cdot c_\lambda$ *es un múltiplo escalar de* c_λ. *En particular* $c_\lambda \cdot c_\lambda = n_\lambda c_\lambda$

Para $p \in P$ y $q \in Q$

$$\begin{aligned} p \cdot c_\lambda \cdot x \cdot c_\lambda \cdot sgn(q)q &= p \cdot a_\lambda \cdot b_\lambda \cdot x \cdot c_\lambda \cdot sgn(q)q \\ &= a_\lambda \cdot b_\lambda \cdot x \cdot c_\lambda \cdot sgn(q)q \\ &= c_\lambda \cdot x \cdot a_\lambda \cdot b_\lambda \cdot sgn(q)q \\ &= c_\lambda \cdot x \cdot a_\lambda \cdot b_\lambda \\ &= c_\lambda \cdot x \cdot c_\lambda \end{aligned}$$

Entonces $c_\lambda \cdot x \cdot c_\lambda$ cumple la propiedad de c_λ y es múltiplo de c_λ. Tomando $x = e$ se tiene el caso particular.

Corolario

$c_\lambda V_\lambda \subset \mathbb{C} \cdot c_\lambda$

Corolario

Para $W \subset V_\lambda$ *una subrepresentación,* $c_\lambda W \subset \mathbb{C} \cdot c_\lambda$

Lema

Sea $W \subset V_\lambda$ *una subrepresentación. Si* $c_\lambda \in W$*, entonces* $V_\lambda \subseteq W$

Se sigue de que $A \cdot c_\lambda \subseteq A \cdot W = W$ por ser subsepresentación.

Observación:

$c_\lambda \in V_\lambda$.

Lema (3)

Si $c_\lambda \notin W$, entonces $W = 0$.

Sabemos que $c_\lambda \cdot W \subset \mathbb{C} \cdot c_\lambda$. Entonces para cualquier $v \in W$

$$c_\lambda \cdot v = n_v c_\lambda$$

como $c_\lambda \notin W$, entonces $n_v = 0$ para toda $v \in W$.
Tomamos $\varphi = (n_\lambda)^{-1} c_\lambda$. Notemos que $\varphi^2 = \varphi$.
Supongamos que $\varphi = u + u^\perp$ con $u \in W$ y $u^\perp \in W^\perp$.

$$\begin{aligned} u + u^\perp &= \varphi = \varphi^2 \\ &= (u + u^\perp)u + (u + u^\perp)u^\perp \\ &= \varphi \cdot u + \varphi \cdot u^\perp \\ &= \varphi \cdot u^\perp \end{aligned}$$

Por tanto $u = -u^\perp + \varphi \cdot u^\perp$ y esto dice que $u^\perp = \varphi$.
Por el lema previo $W^\perp = V_\lambda$.

Teorema

Teorema

Cada V_λ es una representación irreducible de S_d.

Si $W \subseteq V_\lambda$ es una subrepresentación de V_λ, entonces
$c_\lambda \in W$ implica que $W = V_\lambda$.
$c_\lambda \notin W$ implica que $W = 0$.

Orden en las particiones

Definición: (Orden Lexicográfico)

Para dos particiones $\lambda, \mu \in P(d)$ se tiene que $\lambda > \mu$, si el primer término distinto de cero de la forma $\lambda_i - \mu_i$ es positivo.

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad > \quad \mu = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Lema

Lema

Si $\lambda > \mu$, entonces para toda $x \in A$, $a_\lambda \cdot x \cdot b_\mu = 0$.

- Tomamos $x = g \in S_d$. Como $g b_\mu g^{-1}$ es el elemento construido de gT_μ donde T_μ es la tableau que se usó para construir b_μ, entonces es suficiente demostrar que $a_\lambda \cdot b_\mu = 0$.
- Como $\lambda > \mu$, entonces hay dos enteros en el mismo renglón de T_λ y en la misma columna de T_μ.
- Sea τ la transposición de ese par de enteros.
- $a_\lambda \cdot \tau = a_\lambda$, $\tau \cdot b_\mu = -b_\mu$.
- $$\begin{aligned} a_\lambda \cdot b_\mu &= a_\lambda \cdot \tau \cdot \tau \cdot b_\mu \\ &= -a_\lambda \cdot b_\mu \end{aligned}$$

Corolario

Si $\lambda > \mu$, entonces $c_\lambda \cdot A \cdot c_\mu = 0$.

Si $\lambda > \mu$, para todo $x \in A$ se tiene

$$\begin{aligned} c_\lambda \cdot x \cdot c_\mu &= a_\lambda (b_\lambda x a_\mu) b_\mu \\ &= 0 \end{aligned}$$

Inyectividad

Teorema

Si $\lambda \neq \mu$, entonces $V_\lambda \neq V_\mu$

Podemos suponer $\lambda > \mu$. Entonces $c_\lambda \cdot V_\mu = 0$ y $c_\lambda \cdot V_\lambda = \mathbb{C} \cdot c_\lambda \neq 0$.

$$\begin{tikzcd} V_\mu \arrow[r, "\rho(c_\lambda)"] \arrow[d, "T"'] & V_\mu \arrow[d, "T"] \\ V_\lambda \arrow[r, "\rho(c_\lambda)"'] & V_\lambda \end{tikzcd}$$

Existe $v_\lambda \in V_\lambda$ tal que $c_\lambda \cdot v_\lambda \neq 0$, pero $T(c_\lambda \cdot T^{-1}(v_\lambda)) = 0$.

Proyección en V_λ

Lema

Para una partición λ, $c_\lambda \cdot c_\lambda = n_\lambda c_\lambda$, con $n_\lambda = \frac{d!}{\dim V_\lambda}$

Tomamos la proyección $F : A \longrightarrow A$ dada por la multiplicación por la derecha por c_λ.
Para $v \in V_\lambda$, $F(v) = vc_\lambda = n_\lambda v$. Para $v \notin V_\lambda$ se tiene $F(v) = 0$.
Por tanto $\operatorname{tr}(F) = n_\lambda \cdot \dim V_\lambda$.
Por otro lado, usando la base de A dada por los elementos de S_d, tenemos que el coeficiente de σ en $\sigma \cdot c_\lambda$ es 1, entonces $\operatorname{tr}(F) = d!$

Gracias