Exámen parcial 2

22 nov, 2017.

1. *a*) Define: $p \in \mathbb{Z}$ es primo.
   b) Sea $a, b, n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$. Define: $a \equiv b \mod n$.
   c) Demuestra: si $p \in \mathbb{Z}$ es primo entonces $a^p \equiv a \mod p$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

2. *a*) Define: A es un conjunto numerable.
   b) Demuestra: el conjunto de los subconjuntos de $\mathbb{N}$ no es numerable.
   c) (Opcional) Demuestra: el conjunto de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ es numerable.

3. Cierto o Falso

   Nota: en cada caso hay que dar una explicación breve para justificar tu respuesta (no es necesario dar una demostración detallada). En caso de Falso basta con dar un contra-ejemplo.

   a) Si $a, b \in \mathbb{N}$ y a divide a b, entonces $ax + by = 1$ no tiene solución con números enteros.
   b) Si $a, b \in \mathbb{N}$ y a no divide a b, entonces $ax + by = 1$ tiene solución con números enteros.
   c) Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, existe un único $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x \equiv a \mod 5$, $x \equiv b \mod 9$.
   d) El conjunto de los números primos es numerable.
   e) 55 no tiene un recíproco módulo 100.
   f) Existe una potencia de 7 que termina con 00000000007.
   g) El conjunto de los números reales en $[0, 1]$ cuyo desarrollo en base 3 no usa el dígito 1 no es numerable.
   h) El conjunto de los números reales que son raices de polinomios con coeficientes enteros es numerable.
   i) Si $f : A \to B$ es una función inyectiva entonces existe una función $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$.
   j) Si A es infinito entonces tiene la misma cardinalidad que $A \times A$.