Exámen Final

7 dic, 2017.

Parte I: Demostración de teoremas.

Demostrar 2 de los siguientes 3 teoremas (10 puntos para cada problema; si haces los 3, se cuenta los mejores 2). Para cada teorema, hay que anunciar primero el teorema con precisión, después dar definiciones formales y claras de todos los términos que aparecen en el anunciado del teorema, y luego dar la demostración.

1. El teorema fundamental de la aritmética.
2. Para todo conjunto A, $|P(A)| > |A|$, donde $P(A) = \{B \mid B \subset A\}$.
3. El teorema de matrimonios de Hall.

Parte II: Cierto o Falso .

Hay que responder por lo menos 16 de los siguientes 25 incisos (5 puntos para cada inciso; si haces más, se cuenta los mejores 16). En cada inciso hay que dar una explicación breve (unas 3-5 líneas, máximo 10). No es necesario dar una demostración detallada, solo mencionar el punto esencial de la demostración, o incluso se puede usar un dibujo. En caso de Falso basta con un contra-ejemplo. Una respuesta correcta sin ninguna explicación no cuenta.

1. 1009 es un primo.
2. 10^{100} y 11^{111} son primos relativos.
3. 55 divide a $n^{21} - n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
4. La ecuación $33x + 34y = 35$ no tiene soluciones enteras.
5. Existe un entero positivo de la forma $7k + 4$ cuyo desarrollo decimal termina con 2017.
6. El producto de cualesquiera 13 enteros consecutivos es un múltiplo de 13.
7. El sistema $33x \equiv 34 \pmod{35}$, $37x \equiv 38 \pmod{39}$ no tiene una solución $x \in \mathbb{Z}$.
8. Todos los enteros que no son múltiplos de 119 tienen un recíproco módulo 119.
9. $17^{18} + 19^{16} \equiv 1 \pmod{323}$. (Nota: $323 = 17 \cdot 19$).
10. La clase de congruencia módulo 8 de un entero positivo se determina por la suma de los dígitos de su representación en base 9.
11. Existe una infinidad de primos de la forma $4k + 3$.
12. Si un entero n no es un múltiplo de 7 entonces $n^3 - 1$ o $n^3 + 1$ es un múltiplo de 7.
13. Si A es numerable entonces el conjunto de las funciones $f : A \to \{0, 1\}$ es numerable.
14. Si $f : A \to B$ es una función suprayectiva entonces existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$.
15. Si $B \subset A$ entonces $B \notin A$.
16. $A = (A \setminus B) \cup B$ para cualquier dos conjuntos A, B.
17. $B = A \setminus (A \setminus B)$ para cualquier dos conjuntos A, B.
18. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ para cualquier tres conjuntos A, B, C.
19. La ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ tiene 66 soluciones con números enteros no negativos.
20. Existen 66 monomios de grado 10 en 3 variables. (Nota: un monomio en 3 variables es una expresión de la forma $x^a y^b z^c$ con a, b, c enteros no negativos. Su grado es $a + b + c$.)
21. Existe una función inyectiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que no es suprayectiva.
22. Existe una función suprayectiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que no es inyectiva.

23. En toda gráfica el número de vértices con grado impar es par.
24. En toda gráfica el número de vértices con grado par es impar.
25. El conjuntos de números reales con representación decimal finita es numerable.

Opcional (extra crédito). Cierto o Falso.

Estos problemas pueden ayudar a tus calificaciones de los examenes parciales.

1. Existe un cuadrado entre 10^{2017} y 10^{2018}.
2. Existen por lo menos 10^{10} cubos entre 10^{30} y 10^{60}.
3. Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, si a, b no son múltiplos de 7 entonces existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $a^n + b$ es un múltiplo de 7.
4. Existe un $a \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $b \in \mathbb{Z}$, si b no es un múltiplo de 7 entonces existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $a^n + b$ es un múltiplo de 7.
5. Si A y B son dos conjuntos con la misma cardinalidad entonces toda función inyectiva $f : A \to B$ es suprayectiva.
6. Si A y B son dos conjuntos finitos con la misma cardinalidad entonces toda función inyectiva $f : A \to B$ es suprayectiva.
7. En toda gráfica conexa con v vértices y a aristas se cumple que $v \leq a + 1$.
8. Un conjunto con 10 elementos tiene por lo menos 1000 subconjuntos distintos.
9. 10! tiene por lo menos 1000 divisores positivos distintos.
10. Dada una función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ existe un subconjunto infinito $A \subset \mathbb{N}$ tal que la restricción de f a $A \times A$ es constante.