

Tarea núm. 1

(para entregar el jueves 28 ene)

Nota: esta tarea es sobre polinomios. El material de apoyo para esta tarea es (ver en la sección de bibliografía de la página del curso):

- Sección 5.1 y 5.2 del libro de Angel.
- Sección 28 (p. 44) del Libro de Gelfand.

Resumen de los conceptos más importantes que se vieron en la primera clase (26 ene, 2016):

- **Polinomio:** es una expresión (“fórmula”) que contiene letras (las *variables*) y números *reales*, combinados mediante suma, resta y multiplicación.

Por ejemplo: $a^4 + a^3b + b^3$, $(5 - x)(3 + x^2)$, $-\sqrt{2}x$, $(x - y)^{2014}$, 0.

Las potencias que aparecen, como a^4 , son abreviaciones de multiplicación, $a^4 = aaaa$, así que se permite. Potencias negativas, como x^{-1} , no están permitidas, ya que implican división. Potencias negativas, raíces etc the *números* se permiten, como en el 3er ejemplo, ya que estos son números reales, que son permitidos. El *número de variables* de un polinomio es el número de letras distintas que aparecen. Así que el 1er y 4to ejemplos arriba son de dos variables, el 2ndo y 3ero de 1 variable, el último de 0 variables.

Al multiplicar, sumar o restar dos polinomios se obtiene un polinomio. En cambio, el resultado de la división de un polinomio por otro es una operación más delicada; no es un polinomio, en general, sino una *expresión racional*, pero a veces sí es un polinomio; esto lo veremos más adelante.

- **Monomios:** es un polinomio especial, en donde no se usa suma o resta, solo multiplicación (o cómo se dice en el libro, un polinomio con un solo término). Todo polinomio se puede expresar como suma de monomios.

Por ejemplo: x^2 , $2x$, $\sqrt{3}x^2y$, -5 .

- **Grado:** para un monomio, su grado es la suma de las potencias de las variables que aparecen en él (o sea el numero de letras que aparecen , si expandemos las potencias a multiplicacion).

Por ejemplo, los grados de los monomios de arriba (x^2 , $2x$, $\sqrt{3}x^2y$, -5) son 2, 1, 3, 0 (resp.).

El grado de un polinomio es el grado de su monomio de mayor grado.

Por ejemplo: el grado de $xy^{10} - x^4y$ es 11.

Nota: el grado del polinomio 0 (el polinomio “nulo”) no está definido.

Hecho importante (un "teorema"): el grado del producto de dos polinomios *no nulos* es la *suma* de sus grados.

Por ejemplo: el grado de $(5 - x)(3 + x^2)$ es $1 + 2 = 3$. El grado de $(1 + x^2)^{100}$ es 200.

- **Evaluación:** "evaluar" un polinomio de una variable en un número es el resultado de la sustitución del número en lugar de la variable.

Por ejemplo: evaluando el polinomio $x^2 - 3x + 2$ en -1 nos da $(-1)^2 - 3(-1) + 2 = 6$.

Notación: si un cierto polinomio de una variable, x , se denota por $p(x)$ (se lee: " p de x "), entonces el resultado de la evaluación en un número a se denota por $p(a)$. Por ejemplo: si $p(x) = x^2 - 3x + 2$ entonces $p(1) = 0$, $p(-1) = 6$, etc.

- **Raíces:** una raíz de un polinomio de una variable $p(x)$ es un número r tal que $p(r) = 0$ (al evaluar el polinomio en el número da 0). Por ejemplo $x^2 - 1$ tiene dos raíces (1 y -1). En cambio $x^4 + 1$ no tiene raíces. Se sabe que un polinomio de grado n tiene a lo más n raíces. Esto no es nada obvio, pero lo vamos a ver más adelante (el caso especial de grado 2 lo deberían conocer).

Los problemas

Nota: Problemas marcados por * son opcionales.

1. Convertir los siguientes polinomios en una suma de monomios y simplificar .

Ejemplo: $(1 + x - y)(1 - 2x) = 1 + x - y - 2x - 2x^2 + 2xy = 1 - x - y - 2x^2 + 2xy$.

a) $(1 + x - y)(12 - zx - y^2)$

b) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

c) $(1 + x)(1 + x^2)$

d) $(1 + x + x^2 + x^3)^2$.

e) * $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10})^2$.

f) * $(1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{10})$.

g) ** $(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{10})$.

2. En cada caso se especifica un polinomio $p(x)$ y se pide encontrar algunos números.

Ejemplo cómo hacer el inciso a): $p(1) = 1^2 - 4 = -3$. Luego, si $p(r) = 0 \Rightarrow r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2, -2$ (el polinomio tiene dos raíces). Si $p(r) = 1 \Rightarrow r^2 - 4 = 1 \Rightarrow r^2 = 5 \Rightarrow r = \sqrt{5}, -\sqrt{5}$.

	$p(x)$	Encontrar
a	$x^2 - 4$	$p(1)$; los r tal que $p(r) = 0$, $p(r) = 1$.
b	$x^2 - 2x + 1$	$p(1)$; los r tal que $p(r) = 0$, $p(r) = 1$.
c	$x^4 - 2x^2 + 1$	$p(1)$; los r tal que $p(r) = 0$, $p(r) = 1$. (Ayuda: factorizar el polinomio)
d	$(1 + x)^{10}$	$p(0)$; los r tal que $p(r) = 0$, $p(r) = 1$.
e	$(2x - 3)(4x + 5)$	los r tal que $p(r) = 0$, $p(r) = 1$.
f	$x(x^2 - 1)(x^2 - 5)$	los r tal que $p(r) = 0$. (Ayuda: hay 5 tales r).
g	$x^3 - x$	los r tal que $p(r) = 0$. (Ayuda: hay 3 tales r).