Calculo III, ago-dic 2014.

Sugerencias para tarea 15

Sugerencias para problemas de Courant-John, vol. 2, 3.5c, pp 352-353.

2. En cada caso, se toma la derivada con respecto a c de la ecuación de la familia de las curvas $f(x,y,c)=0$, y se usa el resultado para "eliminar"la c, obteniendo una ecuación $E(x,y)=0$ para la envolvente, o una parametrización $x=x(c)$,$y=y(c)$ de la misma (ver p. 343 y los ejemplos de las pp. 345-352).

Es importante hacer dibujos de algunas curvas de la familia, así como la envolvente. En el caso de d) la a es fija (no varia en la familia). Intenta describir la familia de las curvas y su envolvente, en palabras, en cada caso.

Ejemplo de caso (a): al tomar la derivada de $y=cx+1/c$ con respecto a c se obtiene $0=x-1/c^2 \Rightarrow x=1/c^2$. Luego tomamos el cuadrado de los dos lados de $y=cx+1/c$ (un truco) y obtenemos $y^2=c^2x^2+2x+1/c^2=1+2x+x=1+3x$. Así que la famila de rectas $y=cx-1/x$ son las rectas tangentes a la parábola $y^2=1+3x$, con eje $y=0$, vértice en $x=-1/3$ y foco en $x=-1/3+3/4=5/12$.

3. Parametrizamos la curva C por $P(t)=(x(t),y(t))$. Sea $N(t)=(-y',x')/\sqrt{(x')^2+(y')^2}$ el vector normal unitario a la curva en $P(t)$ (hay dos opciones, se escoje por la regla "rotar $P'(t)$ por 90 grados, en contra de las maneciallas del reloj, y normalizar", como se hizo en clase). Las paralelas a distancia p de C son las dos curvas parametrizadas por $P(t)\pm pN(t)$. La familia de los círculos en el problema está dada por $(X-x(t))^2+(Y-y(t))^2=p^2$.

5. La formulación del problema es algo breve e imprecisa, así que modifico un poco la notación y agrego una condición sobre C.

Dado un punto $P=(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $P\neq 0$, su *recta polar* es la recta dada por la ecuación $ax+by=1$ (ver al final de esta sugerencia para el significado geométrico de esta definición). Luego, dada una curva $C\subset\mathbb{R}^2$ que no pasa por el origen, su *recíproca polar* es la envolvente $\overline{C}$ de las rectas polares de los puntos de C. Es decir, si C está parametrizada por $P(t)=(f(t),g(t))$, $t\in(t_1,t_2)$, entonces $\overline{C}$ es la envolvente de la familia de las rectas dadas por $f(t)x+g(t)y=1$, $t\in(t_1,t_2)$.

En el inciso (a) se pide demostrar que $C=\overline{\overline{C}}$ (un hecho bello y sorprendente, aunque el término "recíproca" ya nos advertía). Para demostrar esto, obtenemos primero una parametrización $\overline{P}(t)=(\bar{f}(t),\bar{g}(t))$ de $\overline{C}$, usando una parametrización $P(t)=(f(t),g(t))$ de C. Escribimos la ecuación que define la familia de rectas, $f(t)x+g(t)y=1$, y tomamos su derivada con respecto a t, $f'x+g'y=0$ (uso la abreviación $f=f(t)$, $g=g(t)$, espero no crea confución). La solución de este sistema lineal es $\bar{f}=g'/\Delta$, $\bar{g}=-f'/\Delta$, donde $\Delta=fg'-fg'$, por lo que tenemos que agregar la condición $\Delta\neq 0$ sobre C.

Nota: la condición $\Delta\neq 0$ significa que ninguna de las rectas tangentes de C pasa por el origen.

Ahora para demostrar que $\overline{\overline{C}}=C$ basta demostrar que $\bar{\bar{f}}=f,\bar{\bar{g}}=g$, o sea $\bar{g}'=f\bar{\Delta}$, $\bar{f}'=-g\bar{\Delta}$. Esta es una cuenta larga, algo tediosa, pero elemental. Ha de haber un atajo (truco), que tambien "ecplica"mejor porqué es cierto el inciso, pero no lo conozco. Te reto enconrtrarlo.

Nota: una definición más geométrica de la "recta polar" es la siguiente: se fija primero el círculo C_0 dado por $x^2 + y^2 = 1$ (más general, se puede tomar cualquier otro círculo o incluso una cónica). Luego, dado un punto P fuera de C_0 (ie $\|P\| > 1$), su *recta polar* p (con respecto a C_0) es la recta que pasa por los dos puntos de contacto de las tangentes a C_0 que pasan por P (se dice también que P es el *polo* de p). Si $P \in C_0$, p es la recta tangente a C_0 en P. Si P está dentro de C_0 hay una construcción similar, aun más bella (p es el lugar geométrico de los puntos cuya recta polar pasa por P).

Las siguientes ligas muestran muy bien la construcción
`http://archive.geogebra.org/de/examples/polare/polare_kreis.html`
`http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/PolePolar.shtml`
`http://www.mathcurve.com/courbes2d/polaire/polaire.shtml`

6. Consideramos un círculo de radio a, rodando sobre el eje de x. En el momento t el centro del círculo está en (at, a), así que su ecuación es $(x - at)^2 + (y - a)^2 = a^2$. Ahora consideramos un punto P sobre el círculo, inicialmente en el origen, $P(0) = (0, 0)$. Al rodar el círculo, el punto pinta una cicloide en el plano, parametrizada por $P(t) = a(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$. Luego, el problema pide encontrar la envolvente de la familia de las rectas tangentes al círculo (no a la cicloide!) en $P(t)$. Esto es, para cada t, se toma la recta tangente al círculo $(x-at)^2+(y-a)^2 = a^2$ en el punto $P(t) = a(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$. Encuentra la ecuación de esta recta.

Luego puedes proceder de la manera usual: toma la derivada con respecto a t de la ecuación de la recta y expresa x, y en términos de t (no intenta eliminar la t). Se obtiene las ecuaciones indicados en el problema (el ángulo θ en las fórmulas es el ángulo entre la recta tangente al círculo en $P(t)$ y el eje de x; satisface $\theta = 2\pi - t$).

7. Se toma una cónica C, hipérbola o elipse, con centro en el origen $O = (0, 0)$. Así que C está dada por una ecuación tipo $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$, donde $b^2 - 4ac \neq 0$. Luego para cada $c \in C$, se toma el círculo con centro en c y radio $\|c\|$. El problema es encontrar la envolvente de esta familia de círculos.

8. Se considera una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ y un punto $O \in \mathbb{R}^2$. Luego para cada $M \in \Gamma$ se considera la recta tangente a C en M, y se escoje en esta recta el punto (único) M' que es el más cercano a O. El lugar geométrico Γ' de todos los M' es la curva pedal de Γ con respecto a O. El problema pide demostrar que la curva pedal con respecto a O es tambien la envolvente de la familia de círculos que tienen como diámetro al segmento OM, donde $M \in \Gamma$. La segunda parte del problema pide encontrar la curva pedal de un círculo (digamos $x^2 + y^2 = a^2$), con respecto a uno se sus puntos (digamos $(a, 0)$).

Respuesta: cardioide. Ver `http://en.wikipedia.org/wiki/Cardioid`

También hay unas animaciones bonitas de esta construcción en
`http://en.wikipedia.org/wiki/Pedal_curve`