Calculo III, ago-dic 2014.

Sugerencias para tarea 13

1. Suponemos que las curvas están dadas paramétricamente por $(x(t), y(t)), (\bar{x}(\bar{t}), \bar{y}(\bar{t}))$. Suponemos que para cierto valor de los parámetros, digamos $t = t_0, \bar{t} = \bar{t}_0$,, las curvas se intersectan, $x(t_0) = \bar{x}(\bar{t}_0), y(t_0) = \bar{y}(\bar{t}_0)$. Entonces el ángulo α entre las curvas en este punto de intersección es el ángulo entre los vectores tangentes $v = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)), \bar{v} = (\dot{\bar{x}}(\bar{t}_0), \dot{\bar{y}}(\bar{t}_0))$. El coseno del ángulo entre dos vectores está dado por una fórmula aprendida al principio del curso, $\cos\alpha = v \cdot \bar{v}/\|v\|\|\bar{v}\|$.

3. Aquí se puede usar el problema anterior, más las fórmulas de coordenadas polares: $x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta$. Para la primera curva, $r = f(\theta)$, así que $x = f(\theta)\cos\theta, y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$ es una parametrización de la curva por θ. Similarmente, para la segunda curva. Ahora usa el problema anterior para encontrar el coseno del ángulo entre las curvas en un punto de intersección, digamos $f(\theta_0) = g(\theta_0) = R$.

Respuesta: $\cos\alpha = (AB + R^2)/\sqrt{(A^2 + R^2)(B^2 + R^2)}$, donde $A = f'(\theta_0), B = g'(\theta_0)$.

4. Representa la curva en coordenadas porlares por $r = f(\theta)$. Luego, si la curva forma ángulo constante con los rayos que emergen del origen, también forma ángulo constante con los círculos concéntricos con centro en el origen. Estos últimos están dados en coordendas polares por $r = g(\theta) = const$. Aplicando el problema anterior concluyes, después de unas cuentas sencillas, que la función $f(\theta)$ que buscas satisface $f'(\theta) = af(\theta)$, para toda θ y alguna constante a. Esta ecuación la puedes re-escribir como $[\log f(\theta)]' = a$, así que $\log f(\theta) = a\theta + b$, para alguna constante b. De aquí concluyes la fórmula $r = r_0 e^{a\theta}$.

Nota: la curva se llama una *espiral logarítmica*. El artículo de Wikipedia (en ingles) sobre esta curva es muy bonito. `http://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_spiral`

6. Usa las fórmulas paramétricas de la Cicloide $P(t) = a(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ (fórmula (1) de la pág. 347). Luego, la recta perpendicular a la tangente de una curva parametrizada por $P(t)$ está dada por $[(x, y) - P(t)] \cdot P'(t) = 0$. Encuentra la intersección de esta recta con el eje de x y demuestra que es el punto de contacto $Q = (at, 0)$. Para la segunda parte, encuentra la intersección de la tangente con el círculo (dado por $\|(x, y) - P(t)\|^2 = a^2$).

7. Esta es la construcción del Astroide por "escalera que resbala". Aquí esta una animación bonita `http://mathforum.org/mathimages/imgUpload/Astroid3.gif`
(tomada de `http://mathforum.org/mathimages/index.php/Envelope`).