EXAMEN PARCIAL 1 - SOLUCIONES

1. Encuentra el coseno y el seno del ángulo entre los vectores $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, $-6\mathbf{i}+8\mathbf{k}$ en $\mathbf{R}^3$.

   $\triangleright$
   $$\cos(\theta) = \frac{(3\mathbf{i}+4\mathbf{j})\cdot(-6\mathbf{i}+8\mathbf{k})}{\|3\mathbf{i}+4\mathbf{j}\|\|-6\mathbf{i}+8\mathbf{k}\|} = \frac{3\cdot(-6)}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{6^2+8^2}} = -\frac{9}{25} = 0.36$$
   Luego
   $$\mathrm{sen}(\theta) = \sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \sqrt{1-(9/25)^2} = \frac{4\sqrt{34}}{25}.$$
   Nota: por definición, el ángulo entre vectores está en el rango $0 \le \theta \le \pi$, por lo que $\mathrm{sen}(\theta) \ge 0$. $\square$

2. Encuentra la distancia entre el punto $(2,-1,3) \in \mathbf{R}^3$ y (a) el eje de z (b) el plano $3x+4y+5z=6$ (c) la recta $x-1=y-2=z-3$.
   a) La distancia al eje de z es la magnitud de la proyección al plano xy; esto es, $\|(2,-1)\| = \sqrt{5}$.
   b) La distancia de un punto p_0 al plano $p \cdot v_0 = c$ está dada por $|p_0 \cdot v_0 - c|/\|v_0\|$, por lo que la distancia es
   $$\frac{|(2,-1,3)\cdot(3,4,5)-6|}{\|(3,4,5)\|} = \frac{|6-4+15-6|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}} = \frac{11}{\sqrt{50}}.$$
   c) Re-escribimos las ecuaciones de la recta como $y = x+1$, $z = x+2$, asi que podemos parametrizar la recta por $\mathbf{r}(t) = (t, t+1, t+2)$. Luego encontramos el minimo de $d^2 = \|\mathbf{r}(t)-p_0\|^2 = \|(t-2, t+2, t-1)\|^2 = 3t^2-2t+9$, lo cual sucede cuando $(d^2)' = 6t-2 = 0 \Rightarrow t = 1/3 \Rightarrow d^2 = 3(1/3)^2 - 2/3 + 9 = 26/3 \Rightarrow d = \sqrt{26/3}$. $\square$

3. Encuentra la proyección orthogonal del vector $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ sobre (a) el eje de z (b) el plano $3x+4y+5z=6$ (c) la recta $x-1=y-2=z-3$. Encuentra la magnitud (norma) de estas proyecciones.

   $\triangleright$ Sea $\mathbf{v} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$.
   a) El vector $\mathbf{v}$ se encuentra en el plano xy asi que su proyección ortogonal sobre el eje de z se anula.
   b) Para proyectar $\mathbf{v}$ sobre un plano $p \cdot \mathbf{v}_0 = c$ podemos restar del $\mathbf{v}$ su proyección sobre $\mathbf{v}_0$ (un vector normal al plano); esto es,
   $$\begin{aligned}\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_0}{\|\mathbf{v}_0\|^2}\mathbf{v}_0 &= (\mathbf{i}+\mathbf{j}) - \frac{(\mathbf{i}+\mathbf{j})\cdot(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k})}{\|3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}\|^2}(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}) = \\ &= (\mathbf{i}+\mathbf{j}) - \frac{7}{50}(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}) = \frac{1}{50}(29\mathbf{i}+22\mathbf{j}-35\mathbf{k}).\end{aligned}$$
   La magnitud de esta proyección es $\frac{1}{50}\sqrt{29^2+22^2+35^2} = \sqrt{\frac{51}{50}}$.
   c) Usando la parametrización de la recta del problema anterior, $\mathbf{r}(t) = (t, t+1, t+2)$, basta proyectar $\mathbf{v}$ sobre $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, lo cual da
   $$\frac{(\mathbf{i}+\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})}{\|\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\|^2}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \frac{2}{3}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).$$
   La magnitud de esta proyeccion es $\frac{2}{3}\|\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$. $\square$

4. *a*) Consideramos la curva en el plano parametrizada por $x = 2\cos(t), y = \operatorname{sen}(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Escribe una ecuación para la curva (eliminando el parámero t) y dibuja la curva en el plano, indicando con flechas la dirección del aumento el parámetro.

   ▷ $(\frac{x}{2})^2 + y^2 = \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(t) = 1$. Esta es una elipse, centrada en el origen, con semieje mayor horizonal, de tamaño 2, y semieje menor de tamaño 1.

   [Dibujo]

   b) Repite el inciso anterior para la familia de curvas dadas por $x = \lambda\cosh(t), y = \lambda\operatorname{senh}(t)$, dibujando las tres curvas de la familia que corresponden a $\lambda = 1, 2, 3$ (dibuja las 3 curvas encimadas, en el mismo sistema de coordenadas).

   ▷ $(x/\lambda)^2 - (y/\lambda^2) = \cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1$, por lo que es la rama derecha de una hipérbola, centrada en el origen, con asintotas $y = \pm x$, y vértices en $(\pm\lambda, 0)$.

   [Dibujo]

   c) Encuentra los puntos de intersección de las curvas de los dos incisos anteriores, en términos de la λ.

   ▷ De la ecuación de la hipérbola, $x^2 - y^2 = \lambda^2$. Sumando a esta ecuación la ecuación de la elipse, $(\frac{x}{2})^2 + y^2 = 1$, obtenemos $5(\frac{x}{2})^2 = 1 + \lambda^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{(1+\lambda^2)/5}$. Luego $y^2 = 1 - (\frac{x}{2})^2 = 1 - (1+\lambda^2)/5 = (4-\lambda^2)/5 \Rightarrow y = \sqrt{(4-\lambda^2)/5}$. Tenemos entonces 2 puntos de interseccion para $0 < \lambda < 2$ en
   $$(2\sqrt{(1+\lambda^2)/5}, \pm\sqrt{(4-\lambda^2)/5}),$$
   una intersección para $\lambda = 2$ en $(2, 0)$, y ninguna intersección para $\lambda > 2$.

   d) (Opcional, extra crédito)

   Encuentra un valor de $\lambda > 0$ para el cual las curvas de los incisos (a) y (b) intersectan *ortogonalmente*. Dibuja el par de curvas para este valor de λ.

   ▷ Tomando derivada de la ecuación de la elipse con recpecto a x, $x + 2yy' = 0$, asi que la pendiete de la tangente a la elipse en (x_0, y_0) es $m_1 = y'(x_0) = -x_0/2y_0$. Repitiendo para la hipérbola, obtenemos $m_2 = x_0/y_0$. Las dos rectas tangentes son perpendiculares si y solo si $m_1 m_2 = -1 \Rightarrow (-x_0/2y_0)(x_0/y_0) = -1 \Rightarrow (x_0)^2 = 2(y_0)^2 \Rightarrow 4(1+\lambda^2)/5 = 2(4-\lambda^2)/5 \Rightarrow \lambda = \sqrt{2/3}$.