Examen Final

5 dic 2014

Duración del examen: 3 horas.

Parte I (10 puntos)

Formular y demostrar el teorema de función implicita para una ecuación con dos icognitas.

Parte II (90 puntos)

Por favor apuntar las respuestas en la tabla adjunta.

1. Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} =$
   a) 20
   b) 21
   c) 22
   d) 23
   e) 24

2. El ángulo entre $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ es
   a) Entre 0 y 45 grados
   b) Entre 45 y 90grados
   c) Entre 45 y 90 grados
   d) Entre 90 y 135 grados
   e) Entre 135 y 180 grados

3. El ángulo entre $\mathbf{v} = a\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ es mayor a 90 grados para
   a) $a > 1$
   b) $a < 1$
   c) $a = 1$
   d) $a \in (-1, 1)$
   e) Ningun a

4. La proyección ortogonal del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ sobre $\mathbf{w} = 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ es
   a) 0
   b) múltiplo positivo de $\mathbf{v}$
   c) múltiplo negativo de $\mathbf{v}$
   d) múltiplo positivo de $\mathbf{w}$
   e) múltiplo negativo de $\mathbf{w}$

5. La proyección ortogonal del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ sobre el plano $x + y + z = 1$ es
   a) Un vector paralelo al plano
   b) Un vector perpendicular al plano
   c) Un vector paralelo a $\mathbf{v}$
   d) Un vector perpendicular a $\mathbf{v}$
   e) Ninguno de los anteriores

6. Un vector unitario perpendicular al plano generado por $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ es
   a) $15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$
   b) $15\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$
   c) $\dfrac{15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{389}}$
   d) $\dfrac{15\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{\sqrt{389}}$
   e) $\dfrac{-15\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 8\mathbf{k}}{\sqrt{389}}$

7. El plano que pasa por los puntos $(2, 0, 1), (0, 6-2)$ y $(-2, 3, 1)$ está dado por
   a) $3x + 4y + 6z = 12$
   b) $2x + 2y - 3z = 9$
   c) $x + 2y + z = 9$
   d) $x + 2y - 3z = 7$
   e) $y - z = 4$

8. El vector de velocidad de la trayectoria en $\mathbb{R}^3$ dada por $t \mapsto (1, t, t^2)$ en $t = 1$ es
   a) $\mathbf{i}$
   b) $2\mathbf{k}$
   c) $\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
   d) $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
   e) $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

9. El vector de velocidad de la trayectoria en $\mathbb{R}^3$ dada por $t \mapsto (1, t, t^2)$ es paralelo al plano $x+y+z=1$ para
   a) $t = 0$
   b) $t = -1/2$
   c) $t = 2$
   d) todo t
   e) ningun t

10. La gráfica de una función $y = f(x)$ está dada paramétricamente por $x = 1 + \operatorname{sen}(t)$, $y = e^t$, con $-1 < t < 1$. $f''(1) =$
    a) -1
    b) 0
    c) 1
    d) 2
    e) Ninguno de los anteriores

11. La temperatura en el punto (x, y) está dada por $T = x^3y + xy^3$. Si estamos en $(1, 2)$ y queremos enfriarnos lo más rápido posible, debriamos caminar hacia el punto
    a) $(15, 15)$
    b) $(14, 13)$
    c) $(-13, -11)$
    d) $(-14, -13)$
    e) $(13, 13)$

12. El máximo perímetro posible de un rectángulo inscrito en una elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es
    a) $4\sqrt{a^2+b^2}$
    b) $\dfrac{8}{\sqrt{a^2+b^2}}$
    c) $2\sqrt{a^2+b^2}$
    d) $a^2 + b^2$
    e) $2(a^2 + b^2)$

13. Si una curva está dada en coodenadas polares por $r = 2\sin\theta - \cos\theta$, en coordenadas cartensianas está dada por
    a) $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$
    b) $x^2 - x + 2y = 0$
    c) $x^2 + y^2 + 2x - y = 0$
    d) $x^2 - y^2 - x + 2y = 0$
    e) $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$

14. El lugar geométrico de los puntos en el plano cuya suma de distancias a $(0, 1)$ y $(1, 0)$ es 2 está dado por la ecuación
    a) $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$
    b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$
    c) $4x^2 - 2xy + 4y^2 - 2x - 2y = 0$
    d) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$
    e) $x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$

15. El radio de curvatura de la gráfica de función $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ en el punto $(1, 2)$ es
    a) 1
    b) $\sqrt{2}$
    c) 4
    d) 2
    e) $\dfrac{1}{2}$

16. Si una función diferenciable $z(x, y)$, definida en una vecindad de $(1, 1)$, satisafce que $z(1, 1) = 1$ y $x^2z - 2yz^2 + xy = 0$, entonces su gradiente en $(1, 1)$ es
    a) $\mathbf{i} - \mathbf{j}$
    b) $\mathbf{i} - (1/3)\mathbf{j}$
    c) $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$
    d) $\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
    e) 0

17. La recta normal a la curva dada por $3x^2 + 4x^2y + xy^2 = 8$ en $(1, 1)$ intersecta al eje x en $x =$
    a) $\dfrac{3}{2}$
    b) $-\dfrac{3}{2}$
    c) $\dfrac{5}{2}$
    d) $-\dfrac{2}{3}$
    e) $-\dfrac{2}{5}$

18. Sea $f(x) = F(x, x^2)$ donde $F(x, y)$ es una función diferenciable cuya gradiente en $(1, 1)$ es $(2, 3)$. Entonces $f'(1) =$
    a) 0
    b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

19. Para extender continuamente la función $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ a $(0,0)$ debemos definir a $f(0,0)$ como
    a) 0
    b) 1/2
    c) 1
    d) ∞
    e) Es imposible extender esta función continuamente a $(0,0)$

20. La derivada direccional de $z = xy$ en $(1,2)$ en la dirección de $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ es
    a) 0
    b) $\dfrac{8}{\sqrt{13}}$
    c) $\dfrac{7}{\sqrt{13}}$
    d) 7
    e) 8

21. La maxima derivada direccional de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = xy$ en $(1,2)$ ocurre en la dirección de
    a) $\imath + \jmath$
    b) $\imath + 2\jmath$
    c) $4\imath + 2\jmath$
    d) $4\imath + 6\jmath$
    e) ninguno de los anteriores

22. Si la gradiente de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto $(0,1)$ es $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, entonces la derivada direccional de f en $(0,1)$ en la direccion de $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ es
    a) 16
    b) 18
    c) -18
    d) 0
    e) ninguno de los anteriores

23. El número de mínimos locales de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x/(1+x^2+y^2)$ es
    a) 0
    b) 1
    c) 2
    d) 3
    e) ∞

24. La envolvente de la familia de rectas $c^2+cx+y = 0$ pasa por
    a) $(0,1)$
    b) $(0,-1)$
    c) $(1,-1)$
    d) $(1,1)$
    e) $(2,1)$

25. Sea $f(x,y) = \int_x^y e^{1-t^2} dt$. La gradiente de f en $x = y = 1$ es
    a) 0
    b) $\mathbf{i} + \mathbf{j}$
    c) $\mathbf{i} - \mathbf{j}$
    d) $-\mathbf{i} + \mathbf{j}$
    e) $e\mathbf{i} + (1/e)\mathbf{j}$

26. La evoluta de la elipse $2x^2 + 3y^2 = 4$ es
    a) Otra elipse
    b) Una hiperbola
    c) Una curva contenida en la elipse
    d) Una parábola
    e) ninguna respuesta de las anteriores

27. Si los números reales x, y satisfacen
    $$(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2,$$
    entonces el mínimo valor de $x^2 + y^2$ es
    a) 2
    b) 1
    c) $\sqrt{3}$
    d) $\sqrt{2}$
    e) 0

28. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ la curva de nivel de una función diferenciable $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla F(p) \neq 0$ para todo $p \in C$. ¿Cuál de las siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ NO puede ser C?
    a) Una elipse.
    b) la gráfica de una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
    c) El conjunto vacio

d) La unión de dos rectas distintas que pasan por el origen.

e) El eje de y.

29. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva suave (infinitamente diferenciable). ¿Cuáles de los siguientes enunciados puede cumplir C al mismo tiempo?
 I: C es una curva cerrada.
 II: C no tiene vértices
 III: $x^2 + y^2 = 1$ y $(x-1)^2 + y^2 = 1$ son círculos osculantes de C.

a) I y II

b) I y III

c) II y III

d) I, II y III

30. ¿Cuál de las siguientes descripciones es posible para una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

a) Tiene derivadas parciales continuas de primer orden, $f_x(0,0) = 2$, $f_y(0,0) = 3$ y $\text{lím}_{t\to 0}[f(t,t) - 5t]/t = 7$.

b) Tiene derivadas parciales de primer orden, $\text{lím}_{t\to 0} f(t,t) = 0$ y $\text{lím}_{t\to 0} f(t,-t) = 1$.

c) Tiene derivadas parciales continuas de segundo orden y $f_x = f_y = xy$.

d) Es suave (infinitamente diferenciable), $\text{lím}_{t\to 0} f(t,t) = 0$ y $\text{lím}_{t\to 0} f(t,-t) = 1$.

e) Es suave, $f_x(0,0) = 1$ y su curva de nivel 0 está dada por $x^2 = y^3$.

Examen final

Hoja de respuestas a la parte II

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

	A	B	C	D	E
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

	A	B	C	D	E
21					
22					
23					
24					
25					
26					
27					
28					
29					
30					

Nombre: ____