Tarea núm. 8

(para entregar el jueves 20 marzo)

En esta tarea veremos división de polinomios. Si dividimos un polinomio $p(x)$ por otro polinomio $q(x)$ el resultado es un polinomio $h(x)$ (el "cociente") con un residuo $r(x)$, donde $r(x)$ tiene grado menor que el grado de $q(x)$. Esto significa que

$$p(x) = q(x)h(x) + r(x).$$

Si el residuo $r(x) = 0$ decimos que $q(x)$ *divide* a $p(x)$.

Un caso especial importante es cuando $q(x)$ es de grado 1, de la forma $q(x) = x - a$. En este caso $r(x)$ es una constante, digamos $r(x) = b$, por lo que tenemos:

$$p(x) = q(x)(x - a) + b.$$

Sustituimos a en los dos lados y obtenemos $p(a) = b$.

Conclusión: $x - a$ divide al polinomio $p(x)$, o sea $p(x) = h(x)(x - a)$ para algun polinomio $h(x)$ (o $x - a$ es un *factor* de $p(x)$), justo cuando a es una *raíz* de $p(x)$, $p(a) = 0$.

Los Problemas

1. En cada inciso divide $p(x)$ por $q(x)$. Al terminar, escribe en cada caso el resultado como la ecuación $p(x) = q(x)\cdot$(cociente) + residuo.
   a) $p(x) = -x^3 - 6x^2 + 2x - 4$, $q(x) = x - 1$.
   b) $p(x) = 3x^4 + 4x^3 - 32x^2 - 5x - 20$, $q(x) = 3x^3 - 8x^2 - 5$.
   c) $p(x) = x + 4$, $q(x) = x^2 + 1$.
   d) $p(x) = x^4 + x^2 + 1$, $q(x) = x^2 - x + 1$.
   e) $p(x) = 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 18$, $q(x) = 2x^2 - 3$.
   f) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 4$, $q(x) = x + 1$.
2. En cada caso, sin hacer la división, calcula cuánto es el residuo de la división de $p(x)$ por $q(x)$.
   a) $p(x) = x^4 + 2x + 1$, $q(x) = x - 1$.
   b) $p(x) = x^4 + 2x + 1$, $q(x) = x + 1$.
   c) $p(x) = x - 5$, $q(x) = x + 4$.
   d) $p(x) = 2x^3 - 7x + 11$, $q(x) = x - 3$
   e) $p(x) = 8$, $q(x) = x + 2$.
3. Al dividir un polinomio $p(x)$ por $x^2 - 4$ el residuo es $-2x + 1$. Calcula el residuo cuando $p(x)$ se divide por $x + 2$.
4. (Opcional) ¿Para qué valores de n, $x^2 - 1$ divide a $x^n - 1$?