

## Tarea núm. 2

(para entregar el jueves 30 ene)

Nota: esta tarea es sobre polinomios. Me dí cuenta, después de revisar su tarea núm. 1 y el examen rápido de jueves 23 ene, que antes de estudiar expresiones racionales (cap. 6 de Ángel), necesitamos ver primero con más cuidado el tema de los polinomios (cap. 5 de Ángel).

El material de apoyo para esta tarea es:

- Sección 5.1 y 5.2 del libro de Angel; en particular, ver las tablas que empiezan en la p. 370 del cap. 5.
- Sección 28 (p. 44) del Libro de Gelfand.

Los conceptos más importantes son los siguientes:

- **Polinomio:** es una expresión que contiene letras (las variables), números, suma, resta y multiplicación.

Por ejemplo:  $a^4 + a^3b + b^3$ ,  $(5 - x)(3 + x^2)$ ,  $-\sqrt{2}$ ,  $(x - y)^{2014}$ , 0.

Las potencias que aparecen, como  $a^4$ , son abreviaciones de multiplicación,  $a^4 = aaaa$ . Potencias negativas, como  $x^{-1}$ , no están permitidas, ya que implican división.

Al multiplicar, sumar o restar dos polinomios se obtiene un polinomio. En cambio, el resultado de la división de un polinomio por otro no es un polinomio, en general, sino una *expresión racional* (pero a veces sí es un polinomio; esto lo veremos más adelante).

- **Monomio:** es un polinomio donde no se usa suma o resta, solo multiplicación (o como se dice en el libro, un polinomio con un solo término).

Por ejemplo:  $x^2$ ,  $2x$ ,  $\sqrt{3}x^2y$ ,  $-5$ .

Nota: esta definición de monomio difiere un poco de lo que les dije en la última clase; esto es para que usemos la misma terminología del libro.

- **Grado:** para un monomio, su grado es la suma de las potencias de las variables que aparecen en él.

Por ejemplo, los grados de  $x^2$ ,  $2x$ ,  $\sqrt{3}x^2y$ ,  $-5$  son 2, 1, 3, 0 (resp.).

El grado de un polinomio es el grado de su monomio de mayor grado.

Por ejemplo: el grado de  $xy^{10} - x^4y$  es 11.

Nota: el grado del polinomio 0 (el polinomio “nulo”) no está definido.

Nota que el grado del producto de dos polinomios no nulos es la suma de sus grados.

Por ejemplo: el grado de  $(5 - x)(3 + x^2)$  es  $1 + 2 = 3$ . El grado de  $(1 + x^2)^{100}$  es 200.

- **Evaluación:** evaluar un polinomio de una variable en un número es el resultado de la sustitución del número en lugar de la variable.

Por ejemplo: evaluando el polinomio  $x^2 - 3x + 2$  en  $x = -1$  nos da  $(-1)^2 - 3(-1) + 2 = 6$ . Evaluándolo en  $x = 1$  o  $2$  da  $0$  (decimos también en este caso que  $1, 2$  son **raíces** del polinomio).

Notación: si denotamos a un polinomio de una variable  $x$  por  $p(x)$  (se lee: “ $p$  de  $x$ ”), el resultado de la evaluación en  $a$  se denota por  $p(a)$ . Por ejemplo: si  $p(x) = x^2 - 3x + 2$  entonces  $p(1) = 0$ ,  $p(-1) = 6$ , etc.

## Los problemas

1. Leer el resumen de las secciones 5.1, 5.2 en las tablas de las pp. 370-371 del cap. 5 del libro de Ángel y responder las siguientes preguntas:

p. 374: 1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14.

2. Convertir los siguientes polinomios en una suma de monomios.

Ejemplo:  $(1 + x - y)(1 - 2x)$

Solución:  $(1 + x - y)(1 - 2x) = 1 + x - y - 2x - 2x^2 + 2xy = 1 - x - y - 2x^2 + 2xy$ .

a)  $(1 + x - y)(12 - zx - y^2)$

b)  $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

c)  $(1 + x)(1 + x^2)$

d)  $(1 + x + x^2 + x^3)^2$ .

e)  $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10})^2$ .

f)  $(1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{10})$ .

g) Reto (opcional):  $(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{10})$ .

3. En cada caso se especifica un polinomio  $p(x)$  y se pide encontrar algunos números.

Ejemplo cómo hacer el inciso a):  $p(1) = 1^2 - 4 = -3$ . Luego, si  $p(r) = 0 \Rightarrow r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2, -2$ . Si  $p(r) = 1 \Rightarrow r^2 - 4 = 1 \Rightarrow r^2 = 5 \Rightarrow r = \sqrt{5}, -\sqrt{5}$ .

	$p(x)$	Encontrar
a	$x^2 - 4$	$p(1)$ ; los $r$ tal que $p(r) = 0$ , $p(r) = 1$ .
b	$x^2 - 2x + 1$	$p(1)$ ; los $r$ tal que $p(r) = 0$ , $p(r) = 1$ .
c	$x^4 - 2x^2 + 1$	$p(1)$ ; los $r$ tal que $p(r) = 0$ , $p(r) = 1$ .
d	$(1 + x)^{10}$	$p(0)$ ; los $r$ tal que $p(r) = 0$ , $p(r) = 1$ .
e	$(2x - 3)(4x + 5)$	los $r$ tal que $p(r) = 0$ , $p(r) = 1$ .
f	$x(x^2 - 1)(x^2 - 5)$	los $r$ tal que $p(r) = 0$ . (Ayuda: hay 5 tales $r$ ).
g	$x^3 - x$	los $r$ tal que $p(r) = 0$ . (Ayuda: hay 3 tales $r$ ).