Tarea num. 3

11 mar, 2013

1. Sean M, N dos variedades diferenciales compactas conexas y orientadas de la misma dimensión n y $f : M \to N$ una función suave. Demuestra que las siguientes definiciones del *grado* (*"degree"*) de f son equivalentes:

   a) Sea $\omega \in \Omega^n(N)$ un generador de $H^n_{DR}(N)$ (i.e. $\int_N \omega = 1$). Entonces $grado(f) = \int_M f^*(\omega)$.

   b) Sean c_M, c_N generadores orientados de $H_n(M), H_n(N)$ (resp.). Entonces $f_*[c_M] = grado(f)[c_N.]$

   Nota: H_n aquí denota tu homología favorita; por ejemplo, la de cadenas cúbicas singulares (módulo degeneradas). Un generador orientado es una n-cadena cerrada c tal que $\int_c \omega = 1$, donde ω es una n-forma generadora de H^n_{DR}.

   c) Para cada $x \in M$ tal que $df(x)$ es invertible se define $\sigma(x) \in \{\pm 1\}$ según si $df(x)$ preserva o invierte la orientación. Luego para un valor regular $y \in N$ ($df(x)$ es invertible para todo $x \in f^{-1}(y)$) se define $grado(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \sigma(x)$. (En particular, el grado no depende del valor regular escogido y es entero).

2. Calcula los grados de las siguientes funciones (la orientación en cada caso es la "obvia"):

   a) $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ dada, en coordenada inhomogenea $z \in \mathbb{C}$, por (i) z^n, $n \in \mathbb{Z}$ (ii) $\bar{z}^n$ (iii) $\frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$ (iv) una función racional (cociente de dos polinomios $p(z)/q(z)$).

   b) La composición $S^2 \to S^3 \to S^2$, donde $i : S^2 \to S^3$ es la inclusión $(x, y, z) \mapsto (x, y, z, 0)$, y $\pi : S^3 \to S^2$ es la *fibración de Hopf*: se piensa en S^3 como la esfera unitaria en $\mathbb{C}^2$ y S^2 como $\mathbb{C}P^1$ (el espacio de las lineas complejas en $\mathbb{C}^2$ que pasan por el origen); luego π asocia con un punto en S^3 la linea compleja que genera.

   c) El mapeo de Gauss $G : M \to S^2$, donde $M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie compacta conexa co-orientada y $G(x)$ es el vector unitario en x perpendicular a la superficie y en la dirección positiva.

   (Respuesta: $\chi/2$, donde $\chi = 2 - 2g$ es la característica de Euler. Esto es esencialemente el Teorema de Gauss Bonnet).

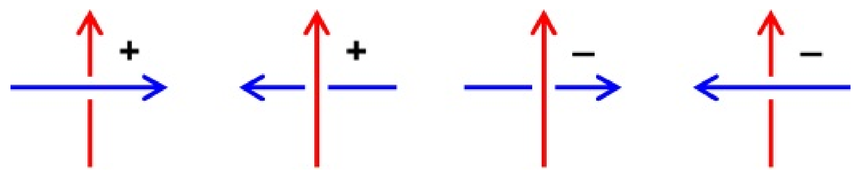
   d) $\sigma : S^1 \times S^1 \to S^2$ dado por $\sigma(x_1, x_2) = f(x_1) - g(x_2)/\|f(x_1) - g(x_2)\|$ donde $f, g : S^1 \to \mathbb{R}^3$ es un enlace, i.e. dos funciones suaves tal que $f(x_1) \neq g(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in S^1$.

   (Respuesta: el *linking number* de f, g.)

   e) $M = \{(x : y : z) \in \mathbb{C}P^2 | y^2 z = x(x^2 - z^2)\}$ y $p : M \to \mathbb{C}P^1$ dada por $(x : y : z) \mapsto (x : y)$.

   (Nota: en coordenadas inghomogeneas $X = x/z, Y = y/z$, p es la proyección al eje de X de la curva en el plano dada por $Y^2 = X(X^2 - 1)$.)

3. Demuestra que el *Linking number* $L(f_1, f_2)$ (ver inciso (d) del problema anterior) se puede calcular de la siguente manera: se deforma las curvas f_1, f_2 tal que las intersecciones de sus proyecciones al plano x, y son transversales, así que hay un número finito de ellas. Luego $L(f_1, f_2) = n_+ - n_-$, donde n_+, n_- son los números de intersecciones potivas y negativas según el siguiente diagrama



4. Sea $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ la esfera unitaria y $p, q \in S^3$ dos puntos en fibras distintas de la fibración de Hopf ($\pi(p) \neq \pi(q)$). Sean $f, g : S^1 \to S^3$ dados por $f(\theta) = e^{i\theta}p$, $g(\theta) = e^{i\theta}q$. Calcula el linking number de f, g. (Nota: el linking number en S^3 se define mediante una proyeccion stereografica a $\mathbb{R}^3$ por un punto que no está en la unión de las imagenes de f, g.)

5. (El invariante de Hopf). Para cada función suave $f : S^3 \to S^2$ se define el número $H(f)$ de la manera siguiente. Sea ω una 2-forma en S^2 tal que $\int_{S^2} \omega = 1$. Entonces se define

$$H(f) := \int_{S^3} f^*\omega \wedge \alpha,$$

donde $\alpha \in \Omega^1(S^3)$ satisface $f^*\omega = d\alpha$.

a) $H(f)$ está bien definida, i.e. tal α existe y la definición no depende de la elección de ω y α.

b) $H(f) \in \mathbb{Z}$.

c) Calcula a $H(\pi)$ para la fibración de Hopf $\pi : S^3 \to S^2$ del problema 2b.

d) $H(f)$ es invariante bajo homotopía.

e) (reto) $H(f)$ define un isomorfismo $\pi_3(S^2) \to \mathbb{Z}$.