Guia para el examen final

(Actualizado: 22 nov, 2013)

Notas:

*1. El examen va a consistir en algunos problemas tomados de esta guia, o problemas muy similares. Los problemas estan divididos en 3 clases: básicos (B) (para alumnos de geq7), de una estrella * (≥ 9) de doble estrella ** ($\geq 10\ldots$).*

2. Todas las representaciones en esta guía son complejas, de dimensión finita (a menos que se indica otra cosa).

1. Cierto o Falso:
   a) Toda representación de dimensión finita de un grupo es la suma directa de subrepresentaciones irreducibles.

   b) Toda representación de dimensión finita de un grupo finito es la suma directa de subrepresentaciones irreducibles.

   c) Toda representación V de un grupo cumple $V^* \cong \overline{V}$.

   d) Toda representación V de un grupo finito cumple $V^* \cong \overline{V}$.

   e) Todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ para algun n.

   f) Todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de O_n (las matrices ortogonales $n \times n$) para algun n.

   g) Todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de SO_n (las matrices ortogonales $n \times n$ con $\det = 1$) para algun n.

   h) Toda representación V de un grupo finito es autodual, $V \cong V^*$.

   i) Toda representación V de un grupo finito es autoconjugada, $V \cong \overline{V}$.

   j) Sea G un grupo finito y $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un homomorfismo de grupos. Entonces existe una matriz $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tal que para todo $g \in G$, $A\rho(g)A^{-1}$ es una matriz ortogonal

   k) * El grupo simétrico S_n tiene solamente dos representaciones irreducibles de dimensión 1: la trivial y el signo.

2. *a*) Descompón $\mathbb{C}^5$ en subespacios invariantes irreducibles bajo permutaciones cíclicas de las coordenadas, $(x_1, \ldots, x_5) \mapsto (x_5, x_1, x_2, x_3, x_4)$.
   b) * Repite el inciso anterior con $\mathbb{R}^5$ en lugar de $\mathbb{C}^5$

3. *a*) Descompón el espacio de las funciones complejas en los vértices del cubo en subespacios irreducibles bajo (a)* el grupo de isometrias del cubo (b) el grupo de rotaciones del cubo (isometrias con det=1).

   Sugerencia: El primer grupo tiene 48 elementos, el segundo es un subgrupo de indice 2 en el primero y es isomorfo al grupo de permutaciones S_4.

   b) Usa el inciso anterior para resolver el siguiente problema: se colocan 8 números reales en los 8 vértices de un cubo. Luego, se sustituye cada uno de los números por el promedio de sus 3 vecinos. Al iterar este proceso 100 veces, ¿qué números esperarías encontrar en los vértices del cubo?

   c) ** Repite el problema anterior cambiando "vértices"por "caras" o "aristas", y "cubo"por "tetraedro" o "dodecaedro"(8 representaciones en total).

4. Descompón el espacio de polinomios homogeneous de grado 2 en 3 variables en subespacios irreducibles bajo la acción de (a) permutaciones de las variables, (b) permutaciones cíclicas (o pares) de las variables.

5. * Repite el prolema anterior para (a) polinomios homogeneous de grado 3 en 3 variables, (b) polinomios homogeneous de grado 3 en n variables.

6. Sea G un grupo finito y V una representación irreducible. Encuentra la dimensión del espacio de los endomporfismos G-equivarientes de $V \oplus V \oplus V$. Encuentra una fórmula explicita general para tales endomorfismos.

7. ** Formula y demuestra una versión del Lema de Schur para respresentaciones sobre $\mathbb{R}$.

8. Sea V una representación compleja de un grupo finito G.
   a) Demuestra que existe en V un producto hermitiano G-invariante.
   b) Demuestra que en caso que V es irreducible el producto hermitiano del inciso anterior es único, salvo multiplicación por un escalar positivo.

9. Sea V una representación de un grupo finito G. Expresa el caracter de las siguientes representaciones en términos del caracter de V: (a) V^*, (b) $\overline{V}$, (c) $V \oplus V$, (d) $V \otimes V$, (e)* $S^2(V)$, (f)* $\Lambda^2(V)$.

10. * Sea V la representación irreducible 2-dimensional de S_3. Encuentra la descomposición de $V^{\otimes n}$ en irreducibles. Es decir: para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, encuentra tres enteros a_n, b_n, c_n tales que $V^{\otimes n}$ es isomorfa a la suma directa de a_n copias de la representación trivial, más b_n copias de la representación signo, más c_n copias de V.

11. Sea (V, ρ) una representacion de un grupo G. Sea $A \subset \mathrm{End}(V)$ el subespacio vectorial generado por el subconjunto $\rho(G)$. Demuestra que (a) A es un subálgebra, (b) V es irreducible ssi $A = \mathrm{End}(V)$.

12. ** Construir la tabla de caracteres del grupo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$ (matrices 2×2 con determinante 1 con entradas en el campo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$).

    Sugerencia: El grupo tiene 24 elementos. La tabla es de 7×7.

13. * Sea H un subgrupo de un grupo finito G. Sea

- $A = \mathbb{C}[G]$ el álgebra del grupo G, considerado como la representación regular izquierda de G.
- $a = \sum_{h\in H} h \in A$.
- $P = \mathbb{C}[G/H]$ la representación de permutación de G asociada con la acción de G en G/H por translaciones por la izquierda;
- U una representación de G;
- W una representación de H;
- $\mathbb{C}$ la representación trivial de H;
- $\mathrm{Ind} = \mathrm{Ind}_H^G$, $\mathrm{Res} = \mathrm{Res}_H^G$.

Construye:

a) Un G-isomorfismo $\mathrm{Ind}(\mathbb{C}) \cong P$.

b) Un G-isomorfismo $P \cong Aa$.

c) Un G-isomorfismo $U \otimes \mathrm{Ind}(W) \cong \mathrm{Ind}(\mathrm{Res}(U) \otimes W)$. Concluye que $U \otimes P \cong \mathrm{Ind}(\mathrm{Res}(\mathrm{U}))$ (isomorfismo de G-representaciones).

d) Un isomorfismo (de espacios vectoriales)

$$\mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}(U)) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}(W), U).$$

Concluye que si U, W son irreducibles, entonces la multiplicidad de U en $\mathrm{Ind}(W)$ es igual a la multiplicidad de W en $\mathrm{Res}(U)$.

e) Verifica la conclusión del último inciso para $G = S_4$ y H un subgrupo: A_4, S_3, $\mathbb{Z}_4 = \langle(1234)\rangle$, $\mathbb{Z}_3 = \langle(123)\rangle$, $\mathbb{Z}_2 = \langle(12)\rangle$, $\mathbb{Z}_2 = \langle(12)(34)\rangle$.

f) * Sea $G = S_n$, $H = S_{n-1}$. Sean W_λ, U_μ las representaciones irreducibles asociadas con los diagramas de Young λ, μ de H, G (resp.). Encuentra la multiplicidad de U_μ en $\mathrm{Ind}(W_\lambda)$.

14. Una representación de un grupo finito es *libre de multiplicidad* si cada representación irreducible del grupo aparece con multiplicidad ≤ 1. Decide cuáles de las siguientes representaciones son libres de multiplicidad:

a) La representación regular izquierda de un grupo abeliano.

b) La representacion de permutación de S_n en $\mathbb{C}^n$.

c) La restricción de la representación anterior a S_k, $2 \leq k < n$.

d) La representación regular izquierda de un grupo no abeliano (por ejemplo, S_{10}).

e) ** La inducción de una representación irreducible de S_k a S_n, $k < n$.

f) ** La restricción de una representación irreducible de S_n a S_k, $k < n$.

15. Considera la representación de permutación de S_n en $\mathbb{C}^n$ asociada con la acción de permutación de S_n en $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

a) Descompón a $\mathbb{C}^n$ en suma directa de subespacios irreducibles invariantes, $\mathbb{C}^n = V \oplus L$, donde L es una representación trivial 1-dimensional y V es irreducible.

b) * Encuentra el diagrama de Young asociado con V.

c) Encuentra el caracter de V.

d) Decide si V es autodual ($V \cong V^*$).

e) Descompón $\mathrm{Res}^{S_n}_{S_{n-1}} V$ en subrepresentaciones irreducibles.

f) * Descompón $\mathrm{Ind}^{S_{n+1}}_{S_n} V$ en subrepresentaciones irreducibles.

16. *a*) Construye la tabla de caracteres de S_4. Verficia que la tabla satiface las relaciones de ortogonalidad de Schur.

    b) * Etiqueta las representaciones en tu tabla por sus diagramas de Young, y verifique que los valores en tu tabla coiniciden con la fórmula de caracter de Frobenius vista en la clase.

    c) * Calcula los simetrizadores de Young de S_4.

    d) Usa la tabla de caracteres de S_4 para determinar la estructura del anillo de representaciones de S_4 (ie descompón los productos tensoriales de irreducibles en irreducibles).

    e) ** Sea V un espacio vectorial. Usa lo anterior para descomponer el espacio de 4-tensores $V^{\otimes 4}$ en subespacios irreducibles bajo $GL(V)$.

    f) ** Sea V un espacio vectorial y $R : V \times V \times V \times V \to \mathbb{C}$ una forma 4-lineal. Se dice que R es un *de tipo curvatura* si satiface las siguientes identidades (copiadas de las propiedades del tensor de curvatura de una variedad (pseudo-)riemanniana): $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_3, v_4, v_1, v_2) = -R(v_2, v_1, v_3, v_4) = -R(v_1, v_2, v_4, v_3), R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_2, v_3, v_1, v_4) + R(v_3, v_1, v_2, v_4) = 0$, para todo $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$. Usa los incisos anteriores para desmostrar que el espacio de 4-tensores en V de tipo curvatura es un subespacio irreducible de la representación $(V^*)^{\otimes 4}$ de $\mathrm{GL}(V)$.

17. ** Sea N un subgrupo normal de un subgrupo finito G. Encuentra una relación en las representaciones de G/N y G.

18. ** Sea $X = \{1, \ldots, n\}$ y $P(X)$ el connunto potencia de X (el conjunto de todos los subconjunto de X). Sean $\mathbb{C}[X], \mathbb{C}[P(X)]$ las representaciones de permutación de S_n asociadas con las acciones obvias de S_n en $X, P(X)$ (resp.). Encuentra la dimensión del espacio de las transformaciones lineales S_n-equivariantes $\mathbb{C}[P(X)] \to \mathbb{C}[X]$.

    Nota: este espacio, aparentemente, es natural a considerar en Teoría de juegos.