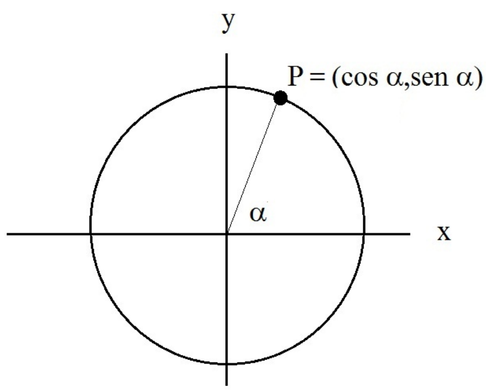
Cálculo Integral para bachillerato, CIMAT, ene-jun 2013

Tarea núm. 8

(para el jueves 18 abril)

Repaso de trigonometría.

Definicion. Para cada ángulo α (cualquer número real) asociamos los números $\cos(\alpha)$ y $\operatorname{sen}(\alpha)$ de la siguiente manera: tomamos el círculo unitario en el plano $x^2+y^2=1$, y empezando en el punto $(1,0)$ recorremos el ángulo α a lo largo del círculo, en contra de la manecillas del reloj si $\alpha \geq 0$, con la manecillas del reloj si $\alpha < 0$. Acabamos en un punto P en el cícrculo unitario. A las coordenadas x, y de P llamamos $x = \cos\alpha$, $y = \operatorname{sen}\alpha$. Luego $\tan\alpha = \operatorname{sen}\alpha / \cos\alpha$.



Propiedades básicas.

- $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
- Si $\alpha+\beta=\pi/2$ entonces $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$;
- $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha+2\pi)$; $\cos\alpha = \cos(\alpha+2\pi)$ (en radianes).
- $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$; $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.

  Nota: si denotamos a $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$, estas últimas par de fórmulas se reescriben simplemente como $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$ (más fácil de memorizar).

Angulos especiales. Para un ángulo α en general, es difícil calcular con precisión los valores de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. Pero para ciertos ángulos se pueden encontrarlos facilmente: $\alpha = 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0$ (en radianes $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\phi}{3}, \frac{\pi}{2}$). Los valores de $\cos\alpha$ para estos ángulos son $0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$ (resp.); los valores de $\operatorname{sen}\alpha$ son los mismos, pero en el orden opuesto.

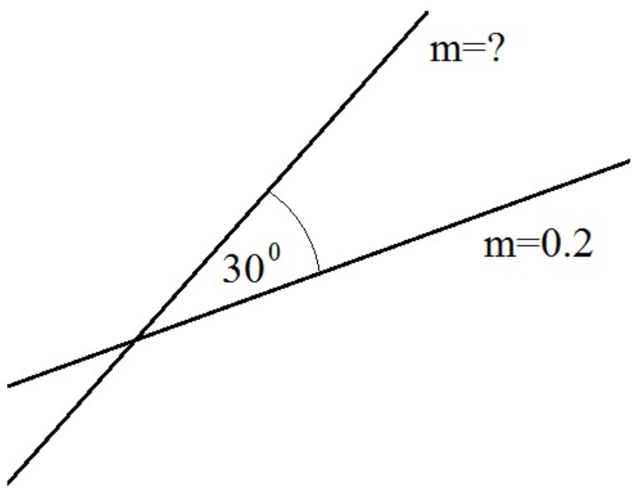
Problemas

1. Encuentra los siguientes valores (sin calculadora).

   (a) $\cos(120^0)$ (b) $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$ (c) $\tan(-\frac{50\pi}{6})$ (d) $\cos(75^0)$.

   Sugerencia para (d): usar la fórmula para $\cos(\alpha+\beta)$.

2. *a*) Expresa a $\operatorname{sen}(2\alpha)$ y $\cos(2\alpha)$ en términos de $\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha$. (Sugenercia: tomar el cuadrado de los dos lados de $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$).
   b) Expresar a $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}$ en términos de $\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha$. (Sugenercia: usar el inciso anterior).
   c) Usar el inciso anterior para encontrar a $\operatorname{sen} 15^0$, $\cos 15^0$ y $\tan 15^0$.
3. Tenemos que α es un ángulo en el rango $0 < \alpha < 90^0$ tal que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.
   a) Encuentra a $\operatorname{sen}\alpha$. (Respuesta: $\frac{1}{4}$).
   b) Encuentra a $\cos 3\alpha, \cos 4\alpha$ (Sugerencia: tomar la cúbica y cuarta potencia de ambos lados de $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$).
4. *a*) Expresa a $\tan(\alpha + \beta)$ en términos de $\tan\alpha, \tan\beta$.
   b) La pendiente de una recta es 20 % ($m = 0.2$). Si se aumenta su inclinación por 30 grados, ¿cómo cambia su pendiente? (Sugerencia: una recta con un ángulo de inclinación α tiene una pendiente de $m = \tan\alpha$).



5. Encuentra todos los ángulos α tal que

   (a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$, $-2\pi < \alpha < 2\pi$; (b) $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\pi/7$, $0 < \alpha < 4\pi$; (c) $\operatorname{sen}\alpha \le \cos\alpha$; (d) $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$.