Aproximaciones polinomiales, sucesiones y series infinitas

Capítulo 8

VISIÓN PRELIMINAR

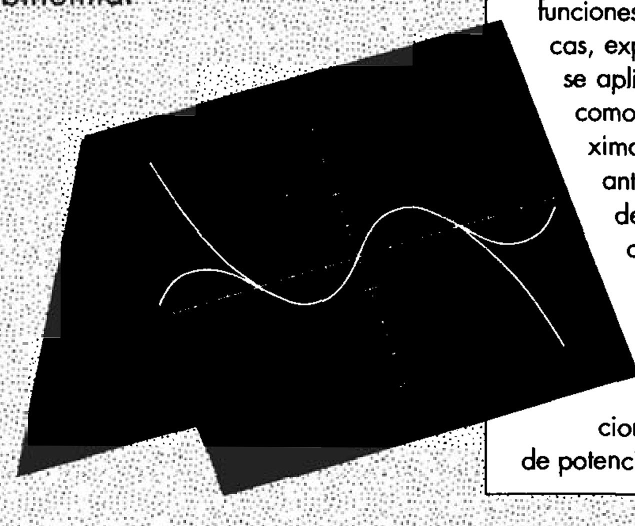
El objetivo principal de este capítulo es aproximar funciones mediante *series de potencias.* Sin embargo, antes del estudio de las series de potencias se preparará el terreno. Se iniciará con el estudio de aproximaciones polinomiales en la sección 8.1, con énfasis en los polinomios de Taylor, los cuales se generalizarán después en la sección 8.9.

En la sección 8.2 se trata la *función sucesión,* la cual es una función cuyo dominio es el conjunto de números enteros positivos y cuyo contradominio consiste de los elementos de la *sucesión.* En el suplemento de la sección 8.2 encontrará la demostración de la equivalencia de *convergencia* y *sucesiones monótonas acotadas* (teoremas 8.2.10 y 8.2.13) basada en la propiedad de *completez de los números reales.* En la sección 8.3, se define la suma de una *serie infinita* como el límite de un tipo particular de sucesión. En esta sección también se tratan los teoremas acerca de series infinitas. Los *criterios de convergencia* de series infinitas se presentan en la sección 8.3 así como en la sección 8.4, donde se consideran series de términos positivos, y en la sección 8.5 en la que se estudian series cuyos términos son positivos y negativos. La sección 8.6 contiene un resumen de los criterios de convergencia y divergencia estudiados en las secciones 8.3 a 8.5.

Después de la introducción a las *series de potencias* en la sección 8.7, aprenderá en las secciones 8.8 a 8.10 a utilizar dichas series para expresar como series infinitas muchas funciones; por ejemplo: funciones racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Las series de potencias se aplican a fin de aproximar números irracionales tales como $\sqrt[3]{29}$, π, e, ln 5 y sen 0.3, así como para aproximar integrales definidas cuyo integrando no tenga antiderivada en forma cerrada. Por ejemplo, las series de potencias pueden emplearse con el objeto de calcular valores de integrales como:

$$\int_0^{0.5} e^{-t^2}\,dt \qquad \int_0^{1} \cos x^2\,dx \qquad \int_0^{0.1} \ln(1+\operatorname{sen} x)\,dx$$

Además, las soluciones de muchas ecuaciones diferenciales pueden expresarse como series de potencias.



8.1 APROXIMACIONES POLINOMIALES MEDIANTE LA FÓRMULA DE TAYLOR

Mientras que los valores de funciones polinomiales pueden determinarse efectuando un número finito de adiciones y multiplicaciones, otras funciones, entre ellas las funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas, no pueden evaluarse tan fácilmente. En esta sección se mostrará que muchas funciones pueden aproximarse mediante polinomios y que el polinomio, en lugar de la función original, puede emplearse para realizar cálculos cuando la diferencia entre el valor real de la función y la aproximación polinomial es suficientemente pequeña.

Varios métodos pueden emplearse para aproximar una función dada mediante polinomios. Uno de los más ampliamente utilizados hace uso de la fórmula de Taylor, llamada así en honor del matemático inglés **Brook Taylor** (1685-1731). El teorema siguiente, el cual puede considerarse como una generalización del teorema del valor medio, proporciona la fórmula de Taylor.

8.1.1 Teorema

Sea f una función tal que f y sus primeras n derivadas son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Además, considere que $f^{(n+1)}(x)$ existe para toda x del intervalo abierto (a, b). Entonces existe un número z en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \tag{1}$$

La ecuación (1) también se cumple si $b < a$; en tal caso $[a, b]$ se reemplaza por $[b, a]$, y (a, b) se sustituye por (b, a).

Observe que cuando $n = 0$, (1) se convierte en

$$f(b) = f(a) + f'(z)(b-a)$$

donde z está entre a y b. Esta es la conclusión del teorema del valor medio.

La demostración del teorema 8.1.1 se presentará posteriormente en esta
(pag 645)
sección. Si en (1) se reemplaza b por x, se obtiene la **fórmula de Taylor**:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{2}$$

donde z está entre a y x.

La condición en la que se cumple (2) es que f y sus primeras n derivadas sean continuas en un intervalo cerrado que contenga a a y x, y la $(n + 1)$-ésima derivada de f exista en todos los puntos del intervalo abierto correspondiente. La fórmula (2) puede escribirse como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{3}$$

donde

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{4}$$

y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{donde } z \text{ está entre } a \text{ y } x \tag{5}$$

$P_n(x)$ se denomina **polinomio de Taylor de n-ésimo grado** de la función f en el número a, y $R_n(x)$ se llama **residuo**. El término $R_n(x)$, dado en (5), se denomina **forma de Lagrange** del residuo, llamada así en honor al matemático francés **Joseph L. Lagrange** (1736-1813).

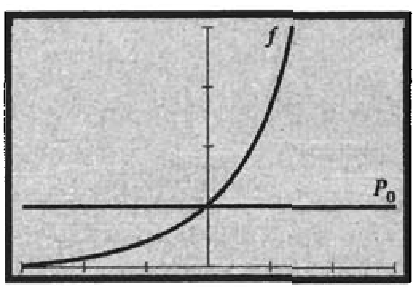
El caso especial de la fórmula de Taylor que se obtiene al considerar $a = 0$ en (2) es

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)}x^{n+1}$$

donde z está entre 0 y x. Esta fórmula recibe el nombre de **fórmula de Maclaurin**, en honor al matemático escocés **Colin Maclaurin** (1698-1746). Sin embargo, la fórmula fue obtenida por Taylor y por otro matemático inglés, **James Stirling** (1692-1770). El **polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado** para una función f, obtenido a partir de (4) con $a = 0$, es

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{6}$$

De este modo, una función puede aproximarse por medio de un polinomio de Taylor en un número a o por un polinomio de Maclaurin.



[-3, 3] por [0, 4]

$f(x) = e^x$

$P_0(x) = 1$

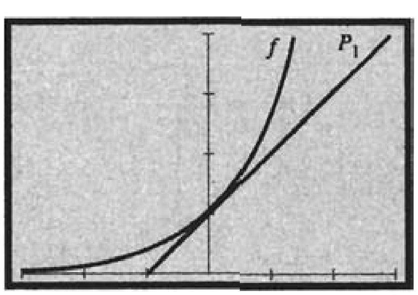
FIGURA 1

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Se calculará el polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado para la función exponencial natural. Si $f(x) = e^x$, entonces todas las derivadas de f en x son iguales a e^x y las derivadas evaluadas en cero son 1. Por tanto, de (6),

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \tag{7}$$

Así, los primeros cuatro polinomios de Maclaurin de la función exponencial natural son

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = 1 + x$$
$$P_2(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2$$
$$P_3(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3$$



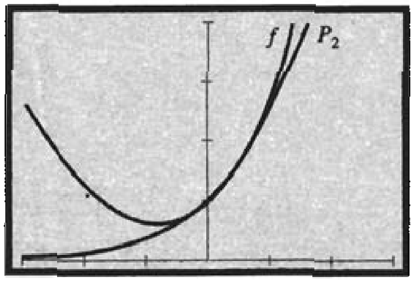
[-3, 3] por [0, 4]

$f(x) = e^x$

$P_1(x) = 1 + x$

FIGURA 2

Las figuras 1 a 4 muestran la gráfica de $f(x) = e^x$ junto con las gráficas de $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$, respectivamente, trazadas en el rectángulo de inspección de [-3, 3] por [0, 4]. En la figura 5 se muestran las gráficas de los cuatro polinomios de Maclaurin y la gráfica de $f(x) = e^x$ en el mismo sistema coordenado. Observe cómo los polinomios aproximan e^x para



[−3, 3] por [0, 4]

$f(x) = e^x$

$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

FIGURA 3

valores de x cercanos a cero, y note que conforme n se incrementa, la aproximación mejora. Las tablas 1 y 2 proporcionan los valores de e^x, $P_n(x)$ (cuando n es igual a 0, 1, 2 y 3) y $e^x - P_n(x)$ para $x = 0.4$ y $x = 0.2$, respectivamente. Observe que con estos dos valores de x, a medida que x está más cerca de 0, es mejor la aproximación para un $P_n(x)$ específico. ◀

Tabla 1

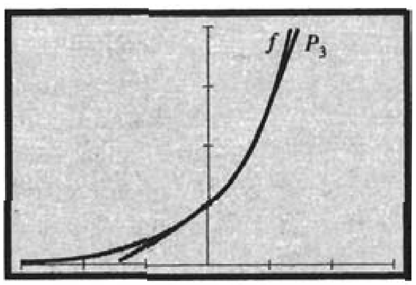
n	$e^{0.4}$	$P_n(0.4)$	$e^{0.4} - P_n(0.4)$
0	1.4918	1	0.4918
1	1.4918	1.4	0.0918
2	1.4918	1.48	0.0118
3	1.4918	1.4907	0.0011

Tabla 2

n	$e^{0.2}$	$P_n(0.2)$	$e^{0.2} - P_n(0.2)$
0	1.2214	1	0.2214
1	1.2214	1.2	0.0214
2	1.2214	1.22	0.0014
3	1.2214	1.2213	0.0001

De (5), la forma de Lagrange del residuo, cuando $P_n(x)$ es el polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado para la función exponencial natural, es

$$R_n(x) = \frac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{donde } z \text{ está entre 0 y } x \tag{8}$$



[−3, 3] por [0, 4]

$f(x) = e^x$

$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

FIGURA 4

En particular, si $P_3(x)$ se emplea para aproximar e^x, entonces

$$R_3(x) = \frac{e^z}{4!}x^4 \qquad \text{donde } z \text{ está entre 0 y } x$$

y

$$e^x = P_3(x) + R_3(x)$$

▶ ***EJEMPLO 1*** Utilice un polinomio de Maclaurin para determinar el valor de $\sqrt{e}$ con una exactitud de cuatro cifras decimales.

Solución Si $f(x) = e^x$, entonces el polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado de f está dado por (7) y la forma de Lagrange del residuo está dada por (8). Si se considera $x = \frac{1}{2}$ en (8), entonces

$$R_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^z}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \qquad \text{donde } 0 < z < \tfrac{1}{2}$$

Así,

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{e^{1/2}}{2^{n+1}(n+1)!}$$

Como $e < 4$, entonces $e^{1/2} < 2$, de modo que

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{2^n(n+1)!}$$

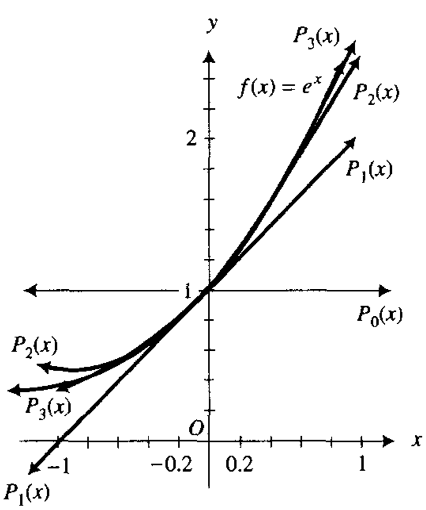


FIGURA 5

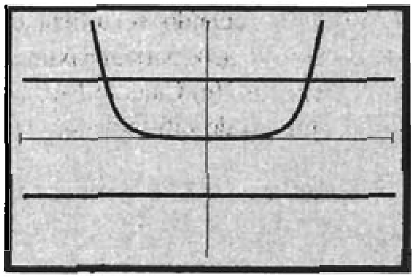
Debido a que el valor de $\sqrt{e}$ se aproximará con cuatro cifras decimales, se desea que $|R_n(\frac{1}{2})|$ sea menor que 0.00005; $|R_n(\frac{1}{2})|$ será menor que 0.00005 si $1/2^n(n+1)! < 0.00005$. Cuando $n = 5$,

$$\frac{1}{2^n(n+1)!} = \frac{1}{(32)(720)}$$
$$= 0.00004$$

Como $0.00004 < 0.00005$, se considera $P_5(\frac{1}{2})$ como la aproximación de $\sqrt{e}$ con una exactitud de cuatro cifras decimales. De (7),

$$P_5(\tfrac{1}{2}) = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{48} - \tfrac{1}{384} - \tfrac{1}{3\,840}$$

de donde se obtiene $\sqrt{e} \approx 1.6487$. ◀



$[-1, 1]$ por $[-0.0001, 0.0001]$

$y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)$

$y = 0.00005$ y $y = -0.00005$

FIGURA 6

▶ **EJEMPLO 2** Estime en la graficadora los valores de x para los cuales $P_5(x)$ aproxima e^x con una exactitud de cuatro cifras decimales.

Solución Si $P_5(x)$ aproxima a e^x con una exactitud de cuatro cifras decimales, entonces

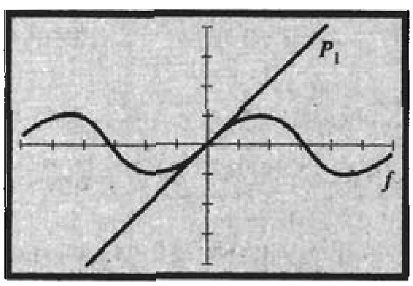
$$|e^x - P_5(x)| < 0.00005$$

La figura 6 muestra la gráfica de $y = e^x - P_5(x)$, es decir,

$$y = e^x - (1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5!)$$

y las rectas $y = \pm 0.00005$ trazadas en el rectángulo de inspección de $[-1, 1]$ por $[-0.0001, 0.0001]$. Al emplear el procedimiento de intersección (*intersect*), o los de rastreo y aumento (*trace* y *zoom-in*), de la graficadora, se determina que la curva y la recta $y = 0.00005$ se intersectan cuando $x = -0.5824$ y $x = 0.5667$. De esta forma, se concluye que cuando $-0.5824 < x < 0.5667$, $P_5(x)$ aproxima e^x con una exactitud de cuatro cifras decimales.

Esta respuesta apoya la conclusión del ejemplo 1 de que $P_5(\frac{1}{2})$ aproxima a $\sqrt{e}$ con una exactitud de cuatro cifras decimales. ◀



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$P_1(x) = x$

FIGURA 7

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Ahora se determinará el polinonio de Maclaurin de n-ésimo grado para la función seno. Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces

$$\begin{array}{lll} f'(x) = \cos x & f''(x) = -\operatorname{sen} x & f'''(x) = -\cos x \\ f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x & f^{(5)}(x) = \cos x & f^{(6)}(x) = -\operatorname{sen} x \end{array}$$

y así sucesivamente. De esta forma, $f(0) = 0$,

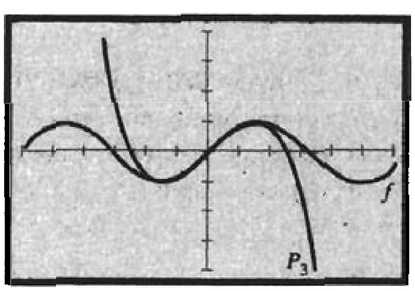
$$f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = -1 \quad f^{(4)}(0) = 0 \quad f^{(5)}(0) = 1$$

etcétera. De (6),

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

De esta forma, $P_0(x) = 0$,

$$\begin{array}{ll} P_1(x) = x & P_2(x) = x \\ P_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} & P_4(x) = x - \dfrac{x^3}{6} \\ P_5(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} & P_6(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} \\ P_7(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5\,040} & P_8(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5\,040} \end{array}$$



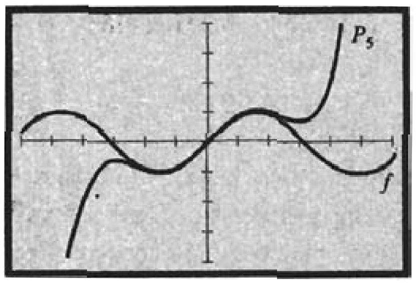
$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$

FIGURA 8

y así sucesivamente.

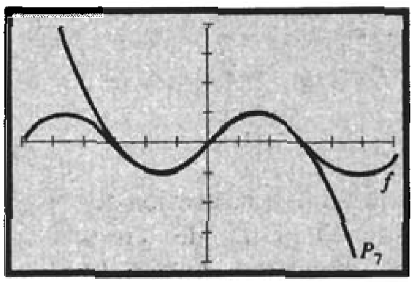


$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$P_5(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$

FIGURA 9



$[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$P_7(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5\,040}$

FIGURA 10

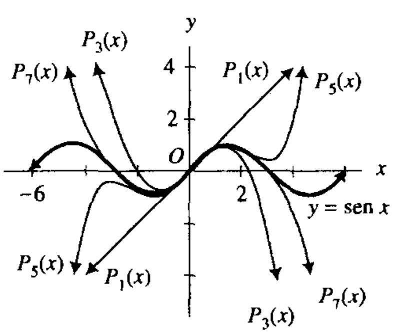
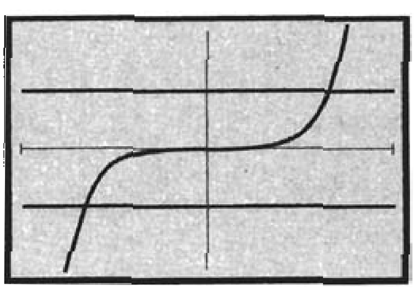


FIGURA 11



$[-1, 1]$ por $[-0.0000002, 0.0000002]$

$y = \operatorname{sen} x - \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5\,040} \right)$

$y = 0.0000001$ y $y = -0.0000001$

FIGURA 12

Las figuras 7 a 10 muestran la gráfica de la función seno junto con las gráficas de sus polinomios de Maclaurin de grados 1, 3, 5 y 7, respectivamente, trazadas en el rectángulo de inspección de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$. La figura 11 muestra las gráficas de estos cuatro polinomios de Maclaurin y la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ dibujados en el mismo sistema coordenado. Observe que las aproximaciones polinomiales mejoran conforme n se incrementa. ◀

▶ **EJEMPLO 3** **(a)** Determine la exactitud cuando se utiliza el polinomio de Maclaurin de grado 7 de la función seno, $P_7(x)$, para aproximar sen 0.5. **(b)** Apoye gráficamente la respuesta del inciso (a). **(c)** Calcule $P_7(0.5)$ para aproximar sen 0.5 con una exactitud en el número de cifras decimales considerado en la respuesta del inciso (a).

Solución

(a) De (3) con $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $n = 7$, se tiene

$$\operatorname{sen} x = P_7(x) + R_7(x)$$

Así,

$$\operatorname{sen} 0.5 = P_7(0.5) + R_7(0.5)$$

donde, de (5) con $x = 0.5$ y $a = 0$,

$$R_7(0.5) = \frac{f^{(8)}(z)}{8!}(0.5)^8 \qquad \text{donde } z \text{ está entre 0 y 0.5}$$
$$= 0.0000001 \operatorname{sen} z$$

Como $|\operatorname{sen} z| < 1$, entonces

$$|R_7(0.5)| < 0.0000001$$

Por tanto, se concluye que cuando $P_7(0.5)$ se emplea para aproximar sen 0.5, el valor es aproximado a seis cifras decimales.

(b) A fin de apoyar la respuesta del inciso (a), debe mostrarse que cuando $x = 0.5$, $|R_7(x)| < 0.0000001$. Como $R_7(x) = \operatorname{sen} x - P_7(x)$, y del cálculo del ejemplo ilustrativo 2, para la función seno,

$$P_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040}$$

se trazan las gráficas de

$$y = \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040} \right) \quad \text{y} \quad y = \pm 0.0000001$$

en el rectángulo de inspección de $[-1, 1]$ por $[-0.0000002, 0.0000002]$, como se muestra en la figura 12. Si se utiliza el procedimiento de intersección (*intersect*), o los de rastreo y aumento (*trace* y *zoom-in*), de la graficadora, se determina que la curva y las rectas se intersectan en los puntos donde $x = \pm 0.6921$. Como $-0.6921 < 0.5 < 0.6921$, se ha apoyado la respuesta del inciso (a).

(c) Al sustituir 0.5 por x en la expresión para $P_7(x)$, se tiene

$$P_7(0.5) = 0.5 - \frac{(0.5)^3}{6} + \frac{(0.5)^5}{120} - \frac{(0.5)^7}{5\,040}$$
$$= 0.47942553$$

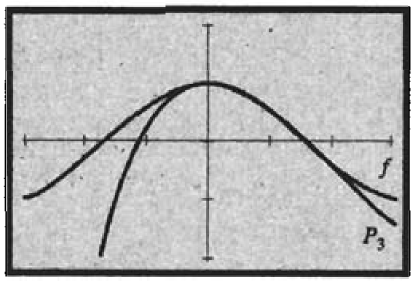
Del inciso (a), este cálculo es preciso con seis cifras decimales. Por tanto,

$$\operatorname{sen} 0.5 = 0.479426$$ ◀

▶ EJEMPLO 4 Determine el polinomio de Taylor de tercer grado de la función coseno en $\frac{1}{4}\pi$ y la forma de Lagrange del residuo. Trace las gráficas del polinomio y de la función coseno en el mismo rectángulo de inspección.

Solución Sea $f(x) = \cos x$. Entonces de (4),

$$P_3(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''(\frac{1}{4}\pi)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f'''(\frac{1}{4}\pi)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$



$[-\pi, \pi]$ por $[-2, 2]$

$f(x) = \cos x$

$P_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}(x - \frac{1}{4}\pi) -$

$\frac{1}{4}\sqrt{2}(x - \frac{1}{4}\pi)^2 + \frac{1}{12}\sqrt{2}(x - \frac{1}{4}\pi)^3$

FIGURA 13

Como $f(x) = \cos x, f'(x) = -\operatorname{sen} x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \operatorname{sen} x,$

$$f(\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad f'(\tfrac{1}{4}\pi) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad f''(\tfrac{1}{4}\pi) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad f'''(\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Por tanto,

$$P_3(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi) - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi)^2 + \tfrac{1}{12}\sqrt{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi)^3$$

Como $f^{(4)}(x) = \cos x$, de (5) se obtiene

$$R_3(x) = \tfrac{1}{24}(\cos z)(x - \tfrac{1}{4}\pi)^4 \qquad \text{donde } z \text{ está entre } \tfrac{1}{4}\pi \text{ y } x$$

Debido a que $|\cos z| \leq 1$, se concluye que $|R_3(x)| \leq \frac{1}{24}(x - \frac{1}{4}\pi)^4$ para toda x.

La figura 13 muestra las gráficas de $P_3(x)$ y de $f(x) = \cos x$ trazadas en el rectángulo de inspección de $[-\pi, \pi]$ por $[-2, 2]$. Observe cómo la gráfica del polinomio aproxima la gráfica de la función coseno cerca de $x = \frac{1}{4}\pi$. ◀

▶ EJEMPLO 5 Utilice el polinomio de Taylor de tercer grado de la función coseno en $\frac{1}{4}\pi$, determinado en el ejemplo 4, para calcular un valor aproximado de cos 47°, y determine la exactitud del resultado.

Solución $47° \sim \frac{47}{180}\pi$ rad. Por tanto en la solución del ejemplo 4 se considera $x = \frac{47}{180}\pi$ y $x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{90}\pi$, y

$$\cos 47° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left[1 - \tfrac{1}{90}\pi - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{90}\pi)^2 + \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{90}\pi)^3\right] + R_3(\tfrac{47}{180}\pi) \tag{9}$$

donde

$$R_3(\tfrac{47}{180}\pi) = \tfrac{1}{24}\cos z(\tfrac{1}{90}\pi)^4 \qquad \text{donde } \tfrac{1}{4}\pi < z < \tfrac{47}{180}\pi$$

Como $0 < \cos z < 1$,

$$0 < R_3(\tfrac{47}{180}\pi) < \tfrac{1}{24}(\tfrac{1}{90}\pi)^4 < 0.00000007 \tag{10}$$

Si se considera $\frac{1}{90}\pi \approx 0.0349066$, de (9) se obtiene

$$\cos 47° \approx 0.681998$$

lo cual tiene una exactitud de seis cifras decimales debido a la desigualdad (10). ◀

Ahora se demostrará el teorema 8.1.1. Se conocen varias demostraciones de este teorema, aunque ninguna está bien motivada. La siguiente demostración utiliza el teorema de del valor medio de Cauchy (7.7.3).

Demostración del teorema 8.1.1 Sean F y G dos funciones definidas por

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n \tag{11}$$

y

$$G(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{12}$$

Entonces se deduce que $F(b) = 0$ y $G(b) = 0$. Al diferenciar (11) se obtiene

$$\begin{aligned} F'(x) = {} & -f'(x) + f'(x) - f''(x)(b-x) + \frac{2f''(x)(b-x)}{2!} - \frac{f'''(x)(b-x)^2}{2!} + \frac{3f'''(x)(b-x)^2}{3!} \\ & - \frac{f^{(4)}(x)(b-x)}{3!} + \ldots + \frac{(n-1)f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-2}}{(n-1)!} - \frac{f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} \\ & + \frac{nf^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!} \end{aligned}$$

Al reducir términos semejantes se observa que la suma de cada término impar y el siguiente término par es igual a cero; de modo que sólo queda el último término. Por tanto,

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n \tag{13}$$

Si se deriva en (12) se obtiene

$$G'(x) = -\frac{1}{n!}(b-x)^n \tag{14}$$

Al verificar la hipótesis del teorema del valor medio de Cauchy se observa que

(i) F y G son continuas en $[a, b]$;
(ii) F y G son diferenciables en (a, b);
(iii) para toda x en (a, b), $G'(x) \neq 0$.

De modo que, por la conclusión del teorema,

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}$$

donde z está en (a, b). Pero $F(b) = 0$ y $G(b) = 0$. Por lo que

$$F(a) = \frac{F'(z)}{G'(z)}G(a) \tag{15}$$

para alguna z en (a, b).

Si se considera $x = a$ en (12), $x = z$ en (13) y $x = z$ en (14), y si se sustituyen en (15) se obtiene

$$F(a) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(b-z)^n\left[-\frac{n!}{(b-z)^n}\right]\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$F(a) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \tag{16}$$

Si $x = a$ en (11), resulta

$$F(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$

Al sustituir de (16) en la ecuación anterior, se tiene

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}$$

lo cual es el resultado deseado. El teorema se cumple si $b < a$ debido a que la conclusión del teorema del valor medio de Cauchy no se afecta si a y b se intercambian. ■

Existen otras formas del residuo de la fórmula de Taylor. Dependiendo de la función, puede convenir emplear una forma del residuo más que otra. El teorema siguiente, llamado *fórmula de Taylor con forma integral del residuo*, expresa el residuo como una integral.

8.1.2 Teorema Fórmula de Taylor con forma integral del residuo

Si f es una función cuyas primeras $n + 1$ derivadas son continuas en un intervalo cerrado que contiene a a y x, entonces $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de n-énesimo grado de f en a y $R_n(x)$ es el residuo dado por

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

La demostración de este teorema se deja como ejercicio (vea el ejercicio 40).

Se ha visto cómo una función puede aproximarse mediante una sucesión de polinomios de Taylor. Los valores de estos polinomios para una valor dado de x puede considerarse como una sucesión de números, tema de la siguiente sección. El polinomio de Taylor de n-ésimo grado es la suma de $n + 1$ términos, y conforme n crece sin límite, la suma puede o no aproximarse a un límite. Tales consideraciones forman las bases de las *series infinitas*, definidas en la sección 8.3 y es el tema principal de este capítulo.

EJERCICIOS 8.1

En los ejercicios 1 a 10, determine el polinomio de Maclaurin del grado indicado para la función f con el residuo en la forma de Lagrange. Trace las gráficas de f y del polinomio en el mismo rectángulo de inspección y observe cómo la gráfica del polinomio aproxima la gráfica de f cerca del punto donde $x = 0$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$; grado 4
2. $f(x) = \dfrac{1}{x + 3}$; grado 5
3. $f(x) = e^{-x}$; grado 5
4. $f(x) = \tan x$; grado 3
5. $f(x) = \cos x$; grado 6
6. $f(x) = \cosh x$; grado 4.
7. $f(x) = \operatorname{senh} x$; grado 4
8. $f(x) = e^{-x^2}$; grado 3
9. $f(x) = (1 + x)^{3/2}$; grado 3
10. $f(x) = (1 - x)^{-1/2}$; grado 4

En los ejercicios 11 a 18, determine el polinomio de Taylor del grado indicado en el número a para la función f con el residuo en la forma de Lagrange. Trace las gráficas de f y del polinomio en el mismo rectángulo de inspección y observe cómo la gráfica del polinomio aproxima la gráfica de f cerca del punto donde $x = a$.

11. $f(x) = x^{3/2}$; $a = 4$; grado 3
12. $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 4$; grado 4
13. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $a = \frac{1}{6}\pi$; grado 3
14. $f(x) = \cos x$; $a = \frac{1}{3}\pi$; grado 4
15. $f(x) = \ln x$; $a = 1$; grado 5
16. $f(x) = \ln(x + 2)$; $a = -1$; grado 3
17. $f(x) = \ln \cos x$; $a = \frac{1}{3}\pi$; grado 3
18. $f(x) = x \operatorname{sen} x$; $a = \frac{1}{6}\pi$; grado 5
19. Calcule el valor de e con una exactitud de cinco cifras decimales, y demuestre que la respuesta tiene la exactitud requerida. Apoye gráficamente la respuesta.
20. Realice el ejercicio 19 para el valor de $e^{-1/2}$.
21. Calcule sen 31° con una exactitud de tres cifras decimales empleando un polinomio de Taylor y demuestre que la respuesta tiene la exactitud requerida. Apoye gráficamente la respuesta.

22. Calcule cos 59° con una exactitud de tres cifras decimales empleando un polinomio de Taylor y demuestre que la respuesta tiene la exactitud requerida. Apoye gráficamente la respuesta.

23. Estime el error que resulta cuando cos x se sustituye por $1 - \frac{1}{2}x^2$ si $|x| < 0.1$.

24. Estime el error que resulta cuando sen x se sustituye por $x - \frac{1}{6}x^3$ si $|x| < 0.05$.

25. Estime el error que resulta cuando $\sqrt{1+x}$ se sustituye por $1 + \frac{1}{2}x$ si $0 < x < 0.01$.

26. Estime el error que resulta cuando $1/\sqrt{x}$ se sustituye por $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ si $0.99 < x < 1.01$. *Sugerencia:* sea $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x = 1 - \frac{1}{2}(x - 1)$.

27. Estime el error que resulta cuando e^x se sustituye por $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ si $|x| < 0.01$.

28. Utilice el polinomio de Maclaurin para la función definida por $f(x) = \ln(1 + x)$ para calcular el valor de ln 1.2 con una exactitud de cuatro cifras decimales.

29. Emplee el polinomio de Maclaurin para la función definida por

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

para calcular el valor de ln 1.2 con una exactitud de cuatro cifras decimales. Compare el cálculo con el del ejercicio 28.

30. Demuestre que si $0 \le x \le \frac{1}{2}$, entonces

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + R(x)$$

donde $|R(x)| < \frac{1}{3\,840}$.

31. Utilice el resultado del ejercicio 30 para determinar un valor aproximado de $\int_0^{1/\sqrt{2}} \operatorname{sen} x^2\, dx$, y estime el error.

32. Demuestre que la fórmula $(1 + x)^{3/2} \approx 1 + \frac{3}{2}x$ es exacta con tres cifras decimales si $-0.03 \le x \le 0$.

33. Demuestre que la fórmula $(1 + x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ es exacta con dos cifras decimales si $-0.1 \le x \le 0$.

34. Dibuje la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = mx$ en el mismo sistema de ejes. Observe que si m es positivo y cercano a cero, entonces las gráficas se intersectan en un punto cuya abscisa está cerca de π. Determinando el polinomio de Taylor de segundo grado en π para la función f definida por $f(x) = \operatorname{sen} x - mx$, muestre que una solución aproximada de la ecuación sen $x = mx$, donde m es positivo y está cerca de cero, está dada por $x \approx \pi/(1 + m)$.

35. Emplee el método descrito en el ejercicio 34 para determinar una solución aproximada de la ecuación cot $x = mx$ cuando m es positivo y está cerca de cero.

36. (a) Utilice el polinomio de Maclaurin de primer grado para aproximar e^k si $0 < k < 0.01$. (b) Estime el error en términos de k.

37. Aplique la fórmula de Taylor para expresar el polinomio

$$P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

como un polinomio en potencias de $x - 1$.

38. (a) Derive término a término el polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado para e^x y compare el nuevo polinomio con el polinomio para e^x. (b) Integre término a término el polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado para e^x, determine la constante de integración y compare el nuevo polinomio con el polinomio para e^x.

39. (a) Derive término a término el polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado para sen x y compare el nuevo polinomio con el polinomio para cos x. (b) Integre término a término el polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado para sen x, determine la constante de integración y compare el nuevo polinomio con el polinomio para $-$cos x.

40. Demuestre el teorema 8.1.2. *Sugerencia:* del teorema 4.7.2 $\int_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a)$. Resuelva para $f(x)$ e integre $\int_a^x f'(t)\, dt$ por partes considerando $u = f'(t)$ y $dv = dt$. Repita este proceso, y el resultado deseado se deduce mediante inducción matemática.

41. (a) Demuestre que los términos del polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado de una función impar contienen sólo potencias impares de x. (b) Demuestre que los términos del polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado de una función par contienen sólo potencias pares de x.

42. Cuando se emplea un polinomio de Taylor en potencias de $x - a$ para aproximar un valor de función en un número particular x_1, ¿qué hechos influyen en la elección de a? Ilustre la respuesta para las funciones definidas por $f(x) = e^x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$.

8.2 SUCESIONES

Sin duda, ha encontrado *sucesiones* de números en sus estudios anteriores de matemáticas. Por ejemplo, los números

2, 4, 6, 8, 10

forman una sucesión. Esta sucesión se denomina **finita** porque tiene un último número. Si un conjunto de números que forman una suceción no tiene último número, se dice que la sucesión es **infinita**. Por ejemplo,

$$\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{4}{9}, \ldots \qquad (1)$$