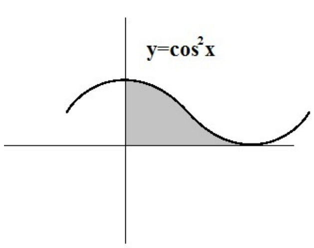
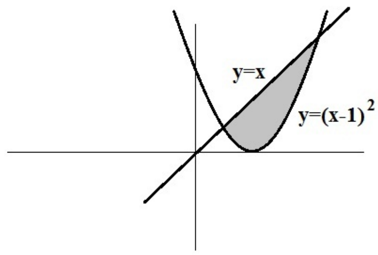
Guia para el examen final

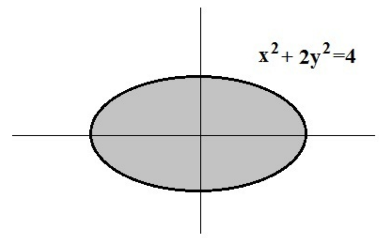
1. En cada uno de los dibujos siguienets, hay que calcular el área sombreado.



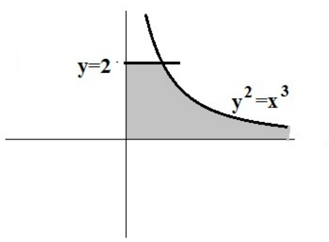
(a)



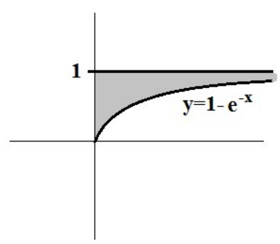
(b)



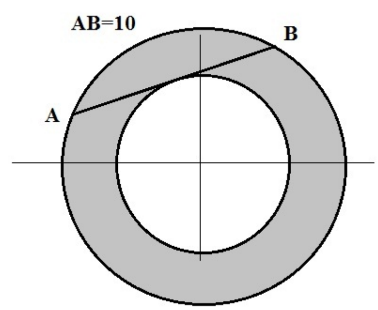
(c)



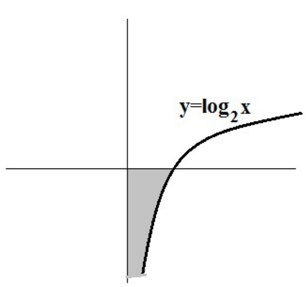
(d)



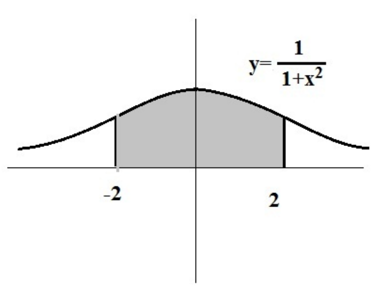
(e)



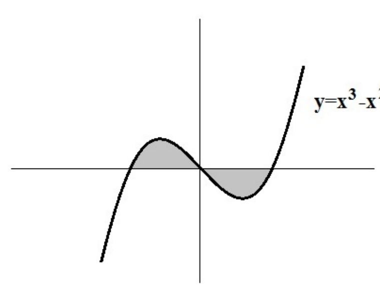
(f)



(g)



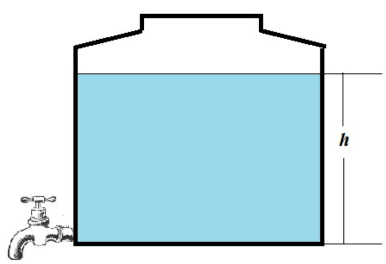
(h)



(i)

Sugerencia para 1f: tenemos aquí dos círculos concéntricos (con radios no espicificados!) y una cuerda del cícrculo exterior que mide 10 cm y que es tangente al cícrculo interior.

2. Encuentra los primeros 3 términos no nulos de la serie de Taylor de las siguientes funciones alrededor de $x = a$:
   a) $y = \tan(x)$, $a = 0$.
   b) $y = \arctan(x)$, $a = 0$.
   c) $y = 2^x$, $a = 0$.
   d) $y(x) = 2gz^2$, donde $z = \cos(\sqrt{x/2})$ y g es una constante, $a = 0$.
   e) $y(x) = (1 - \frac{1}{x^2})^4$, $a = 0$.
   f) $y(x)$ es una funcion que satisface $x - y + y^3 = 0$, $y(0) = 0$; $a = 0$.
   g) $y(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$, $a = 3$.
   h) $y(x) = \int_x^7 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$, $a = 3$.
   i) $y(x) = \operatorname{sen}(\arccos(x))$, $a = 0$.
   j) $y(x) = \operatorname{sen}(\arctan(x))$, $a = 0$.
3. Una partícula se mueve a lo largo del eje de x segun la fórmula $x(t) = t^3 - t^2 - 2t$.
   a) Encuentra los intervalos de tiempo tal que la partícula se mueve hacia la derecha/izquierda.
   b) Encuentas los momentos y lugares tal que la partícula se mueve con una velocidad 3.
   c) Encuentra los lugares que la partícula ha visitado n veces, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.
4. Enceuntra el área del parte del disco con centro en (1,-2) y radio 3 que se encuentra arriba del eje de x.
5. Encuentra una recta que pasa por el origen y que divide en 2 partes del mismo área la parte de la parábola $y = (x - 3)^2 - 1$ que se encuentra abajo del eje de x.
6. Un tinaco cilíndrico tiene una llave en el fondo y agua a un nivel de 1 metro arriba del fondo. Abrimos la llave y el nivel de agua empieza a bajar. Despues de 1 minuto el nivel del agua ha bajado 10cm. Dejando la llave abierta, ¿en cuánto tiempo se vacia el tinaco?



Sugerencias:

a) Denotamos por $h(t)$ el nivel del agua en el tinaco (en cm) como función del tiempo t (en minutos), $t = 0$ siendo el momento de abrir la llave.

Vamos a demostrar abajo que la función $h(t)$ tiene la forma $h(t) = h_0(1-t/t_0)^2$, donde $h_0 = h(0)$ es el nivel incial del agua y t_0 es el momento que se vacia el tinaco, $h(t_0) = 0$, lo que buscamos.

De aquí, usando los valores dados en el problema de $h(0) = h_0 = 100$ y $h_1 = h(1) = 90$, determina el valor de t_0 (el momento t_0 que el tinaco se vacia, $h(t_0) = 0$).

Respuesta: $t_0 = 1/(1 - \sqrt{h_1/h_0}) \approx 19.5$ minutos.

b) Para llegar a la fórmula del inciso anterior para $h(t)$, vamos a demostrar abajo que $h(t)$ satiface una ecuación diferencial de la forma $\frac{dh}{dt} = -c\sqrt{h}$, para una constante $c > 0$.

Demuestra que la solución general de la ecuación $h' = -c\sqrt{h}$, con $h(0) = h_0$ y $h(t_0) = 0$, es la fórmula del inciso anterior.

c) Para llegar a la ecuación $h' = -c\sqrt{h}$ (la parte más importante y bonita de este problema) vamos a usar dos leyes de conservacion: (1) conservacion de masa y (2) conservacion de energia.

Más preciso: (1) el agua que pierde el tinaco sale por la llave; (2) la energia cinética del chorro de agua que sale por la llave viene de la energia potencial que pierde el tinaco .

d) Empezamos por la conservación de masa. Denotamos por A el área¡de superficie del agua en el tinaco, por a el área de la apertura de la llave (ambos en cm^2) y por $v(t)$ la velocidad del chorro del agua (en cm/min) que sale por la llave en el momento t (obviamente, la $v(t)$ se disminue con t, igual que la $h(t)$).

Demuestra que la ley conservación de masa para el agua en este problema implica la relación $\frac{dh}{dt} = -\frac{a}{A}v$.

Para ver esto, considera un pequeño intervalo de tiempo $[t, t+\Delta t]$. Denota por $\Delta h = h(t+\Delta t) - h(t)$, el cambio del nivel de agua en este intervalo del tiempo (nota que $\Delta h < 0$.). Demuestra que en este intervalo de tiempo el tinaco perdio un volumen de agua de $\approx A|\Delta h|\ cm^3$, y que por la llave salieron $av(t)\Delta t\ cm^3$ de agua. Así que $A\Delta h \approx -av(t)\Delta t$. Dividiendo entre Δt y tomando el límite $\Delta t \to 0$, obtienes la relación $h' = -\frac{a}{A}v$.

e) Conservación de energía. Usamos la misma notación del inciso anterior y además denotamos por ρ (la letra griega “rho”) la densidad de agua (en g/cm^3, un poco menos que 1 en Guanajuato), y por g la aceleración de objetos debido a gravedad en la superficie de la tierra (en cm/min^2).

Demuestra que en el intervalo de tiempo $[t, t+\Delta t]$ la energía potencial V que perdió el tinaco, debido a la perdida de $A\Delta h$ de agua, es $\Delta V \approx \rho(A\Delta h)gh(t)$, y que la energía cinética del chorro del agua que estaba saliendo por la llave en este intervalo del tiempo es $\Delta K \approx \frac{1}{2}\rho(A\Delta h)[v(t)]^2$. Igualando $\Delta K = \Delta V$ (la ley de conservacion de energia), obtienes $v = \sqrt{2gh}$.

f) Combinando los dos incisos anteriores obtienes una ecuación del tipo $h' = -c\sqrt{h}$, para alguna $c > 0$ (expresa la c en términos de a, A, g, aunque no vamos usar esta expresión aquí). Has llegado a la “ecuación del tinaco” (o del “reloj de agua”).

g) Haz unos expriementos con distintos contenedores de agua (vasos, garafones...) y compara los resultados con la fórmula $h(t) = h_0(1 - (t/t_0))^2$.