Teoria de Morse, ago-dic 2012.

Tarea num. 7
(Para el viernes, 26 oct, 9:30am)

Sea M una variedad riemanniana. El tensor de curvatura se define por $R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$. (La definición es en términos de *campos* vectoriales, pero en realidad el valor de $R(X,Y)$ en un punto $x \in M$ solo depende de los valores de X, Y en x.). Nota que en esta definición el signo es diferente al signo en el libro de Milnor (pero coincide con Wikipedia...).

1. Demuestra las siguientes propiedades de R
   a) $R(X,Y) = -R(Y,X)$.
   b) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(X,Y)W, Z\rangle = 0$ ($R(X,Y)$ es antisimétrico).
   c) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$ (R es un endomorfismo simétrico de $\Lambda^2(T^*M)$).
   d) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(X,Z)W, Y\rangle + \langle R(X,W)Y, Z\rangle = 0$ ($R \perp \Lambda^4(T^*M)$; la identidad de Bianchi.)
2. Dado un espacio euclideano V (un espacio vectorial real con producto escalar) el espacio de tensores R de tipo $3,1$ que satifacen las 4 condiciones del problema anterior se llama el espacio de tensores tipo curvatura. Calcula su dimensión para $dim V = 2, 3$ (Respuesta: 1, 6, resp.).
3. Encuentra una fórmula para la curvatura de una métrica en $\mathbb{R}^2$ de la forma $ds^2 = f(x,y)(dx^2 + dy^2)$, donde f es una funcíon positiva. Aplica esta fórmula para encontrar la curvatura del plano hiperbólico ($f = 1/y^2$).

   Respuesta: $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = k(\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle X,Y\rangle\langle Z,W\rangle)$, donde $k = c(\Delta \log f)/f$, $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ y $c \neq 0$ una constante.

   Nota: según un teorema de Korn y Lichtenstein del 1916, toda métrica riemanniana en dimensión 2 es localmente isométrica a una métrica de esta forma (“existencia de coordenadas isotérmicas”).