

Tarea núm. 5

(para el martes, 25 sept)

El método de Newton, visto en la clase de 18 sept., es un método iterativo para encontrar una solución a una ecuación tipo $f(x) = 0$, donde $y = f(x)$ es una función. Según este método, definimos primero la función $F(x) = x - f(x)/f'(x)$, y luego, empezando con una aproximación inicial x_0 , usamos la $F(x)$ para definir una sucesión de aproximaciones sucesivas: $x_1 = F(x_0)$, $x_2 = F(x_1)$, ... etc.

En otras palabras, “adivinamos” una aproximación inicial x_0 , y luego la vamos mejorando, $x_1 = x_0 - y_0/y'_0$, $x_2 = x_1 - y_1/y'_1$, ..., $x_{n+1} = x_n - y_n/y'_n$, donde $y_n = f(x_n)$, $y'_n = f'(x_n)$.

En la clase hemos usado este método para encontrar la cúbica raíz de 2: hemos tomado $f(x) = x^3 - 2$, así que la solución de $f(x) = 0$ es justo $\sqrt[3]{2}$. Luego, para esta $f(x)$, $F(x) = x - \frac{x^3-2}{3x^2} = \frac{2}{3}(x + \frac{1}{x^2})$, así que empezando digamos con $x_0 = 2$ hemos obtenido $x_1 = F(x_0) = \frac{3}{2}$, $x_2 = F(x_1) = 35/27$, etc.

Nota importante: el método *no siempre funciona*, dependiendo de la función $f(x)$ y el punto inicial x_0 seleccionado. En los problemas abajo veremos algunos ejemplos para entender mejor lo que pasa.

Se puede usar en los problemas calculadora para hacer la cuentas, pero es *mucho* mejor hacerlas con una hoja de Excel, como hemos hecho en clase. Por favor lleva los archivos de Excell que has producido a la clase en una memoria, el día de entregar la tarea.

Problemas

- Usa el método de Newton con la función $f(x) = x^2 - 7$ para encontrar a $\sqrt{7}$ con una precisión de 0.01 (dos cifras después del punto decimal).
 - Usa el método empezando con distintos valores iniciales, $x_0 = 1, 3, 5, 10$ y observa lo que pasa.
 - ¿Qué sucede si empiezas con $x_0 = 0$ o con $x_0 = -1$? Haz un dibujo de la gráfica de $f(x)$ para entender lo que pasa.

- La “sección aurea” se define como el número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Usa el método de Newton para encontrar el valor de ϕ con una precisión de 0.01.

Sugerencia: usa la función $f(x) = x^2 - x - 1$. Nota que la gráfica de esta función intersecta el eje de x en los puntos $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$.

- Hay otro método iterativo para encontrar el valor de ϕ . Usas la función $G(x) = 1 + \frac{1}{x}$, empezas digamos con $x_0 = 1$, y luego defines sucesivamente $x_1 = G(x_0)$, $x_2 = G(x_1)$, $x_3 = G(x_2)$, etc. Haz una hoja de Excel implementado este esquema y compara sus resultados con el método de Newton.

Nota: en la clase, si nos da tiempo, voy a explicar de donde salió este método alternativo para calcular ϕ y porqué este número ϕ es tan importante para merecer un nombre... El método tiene que ver con el tema de “fracciones continuas” (si quieres buscarlo en Wikipedia). Te recomiendo también ver el artículo sobre la sección aurea en Wikipedia (se llama el “número aureo”). El artículo de Wikipedia sobre ϕ en inglés es aun mejor (“the golden ratio”), con muchos dibujos bonitos y relaciones sorprendentes a otras áreas de la ciencia y el arte.

- Usa el método de Newton para encontrar a todas las soluciones de la ecuación

$$x^3 - 3x + 1 = 0,$$

con una precisión de 0.01.

Sugerencia: hay 3 soluciones. Para tener idea qué valores iniciales tomar para obtener cada una de las soluciones te sugiero hacer una gráfica aproximada de la función. Puedes usar un graficador de funciones en internet. Por ejemplo: <http://www.mathsisfun.com/data/function-grapher.php>.