Cálculo para bachillerato (5to semestre), CIMAT, ago-dic 2012

Guia para el examen final

1. Investiga cada una de las siguientes funciones: (a) dominio (los valores de x para los cuales $y(x)$ está bien definida); (b) derivada; (c) los valores de x para los cuales $y(x)$ es creciente/descreciente (d) mínimos/máximos locales/globales (e) puntos de intersecciones con los ejes de coordenadas; (f) puntos de inflexión ($y'' = 0$) (g) gráfica de la función, reflejando toda la información encontrada.

   (i) $y = x^3 - 3x + 1$ (ii) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ (iii) $y = x - \log(1 + x^2)$ (iv) $y = e^{-x^2}$ (v) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ (vi) $y = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$ (vii) $y = 3^x$ (viii) $y = x^x$.

   (Sugerencia para (viii): $x^x = e^{\log(x^x)} = e^{x \log x}$.)

2. Encuentra la ecuación de la recta tangente (a) a la curva $x^2 + x^3 + y^4 + y^5 = 4$ en el punto $x = y = 1$; (b) a la elipse $(x - 1)^2 + y^2/4 = 5$ en sus puntos de intersección con el eje de y; (c) al círculo con centro $(0, 1)$ que es tangente a la parábola $y = x^2$ en sus puntos de tangencia con la parábola; (d) a la parábola $y = x^2 - 1$ que pasa por $(2, 0)$.

3. Se requiere producir una lata cilíndrica con un volumen de $V = 4$ litros (1 litro = $1000cm^3$). La lata está hecha de lámina, cuyo costo es $L = 50$ pesos por m^2. La tapa y la base se hacen de dos discos que se cortan de dos cuadrados (se desperdicia lo que sobra de los cuadrados) y la pared de un rectángulo. Luego se solda la pared en forma de tubo y se le soldan las tapas. El costo de soldar es $S = 2$ pesos por metro. Encuentra un diseño (diámetro y altura) que minimiza el costo de producción de la lata (lámina+soldar) y encuentra este costo de producción.

   Sugerencia: para resolver este problema vas a tener que resolver una ecuación de grado 4 del tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Usa el método de Newton. Otra opción es buscar un programa en internet que lo haga; por ejemplo: `http://www.easycalculation.com/algebra/quartic-equation.php` .

4. Se deja caer un objeto de una altura inicial de h_0 metros. Su altura h (en metros), t segundos depsues, está dada por la fórmula $h = h_0 - gt^2/2$, donde $g = 9.8$. Si $h_0 = 100m$, (a) encuentra una fórmula para la velocidad y la acelaración del objeto como función de t; (b) ¿en cuánto tiempo llega el objeto al piso ($h = 0$)? (c) ¿Cuál es su velocidad al llegar al piso? (d) ¿En qué momento el objeto tiene la mitad de la velocidad del inciso anterior? (e) ¿De qué altura se tiene que dejar caer el objeto para que llegue al piso con una velocidad de 100kmh?

5. Se lanza un objeto horizontalmente de una altura de h_0 metros con una velocidad inicial de v_0 m/seg. Las coordenadas (x, y) del objeto t segundos despues son $x = v_0 t$, $y = h_0 - gt^2/2$. Si lanzamos el objeto de una altura de $h_0 = 10m$ con una velocidad inicial de $v_0 = 10m/seg$, (a) ¿en qué punto pegará al piso? (b) ¿en qué ángulo? (c) ¿Con qué velocidad?

   Sugerencia para (b). El ángulo buscado α satisface $tan(\alpha) = y'(x_0)$, donde x_0 es el punto del eje de x donde el objeto pega. Sugerencia para (c) la velocidad $v(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$. Otra manera de hacer (c): según la ley de conservación de energía, $gh + v^2/2$ es constante (no depende de t, aunque h y v sí dependen).

6. Encuentra el valor de $a > 0$ para que la parábola $y = x^2 - a$ intersecte el eje de x con un ángulo de 37 grados.

7. (a) Usando la derivada de $y = \sqrt{x}$ en $x = 9$, encuentra una aproximación para $\sqrt{9.2}$. Compara tu respuesta con el valor real. (Sugerencia: aproxima la gráfica de esta función cerca de $(9, 3)$ por su tangente en $(9, 3)$.)
   (b) Usa la misma idea para encontrar una aproximación a 1/998. (Respuesta: $\frac{1}{x_0+\Delta x} \approx \frac{1}{x_0} - \frac{\Delta x}{x_0^2}$).

   Nota: en cursos más avanzados de cálculo uno aprende como mejorar la aproximación $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. Por ejemplo, $\frac{1}{x_0+\Delta x} \approx \frac{1}{x_0} - \frac{\Delta x}{x_0^2} + \frac{(\Delta x)^2}{x_0^3} - \frac{(\Delta x)^3}{x_0^4} + \ldots$.