$6.372

# ALGEBRA SUPERIOR


MURRAY R. SPIEGEL, Ph. D.

*Professor of Mathematics*
*Rensselaer Polytechnic Institute*


TRADUCCIÓN Y ADAPTACIÓN

LUIS GUTIÉRREZ DÍEZ
*Ingeniero de Armamento*

ANGEL GUTIÉRREZ VÁZQUEZ
*Ingeniero de Armamento*
*Licenciado en Ciencias Físicas*
*Diplomado en Ingeniería Nuclear*


**McGRAW-HILL**

**MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • GUATEMALA • LISBOA • MADRID**
**NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO**
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MONTREAL • NUEVA DELHI
PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS
SIDNEY • TOKIO • TORONTO

# CAPITULO 17

# Teorema del binomio de Newton

NOTACION FACTORIAL. Las identidades siguientes indican el significado de «factorial de $n$» escrito $n!$, o bien $\underline{|n}$.

$$2! = 1 \cdot 2 = 2, \qquad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \qquad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120, \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n, \qquad (r-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (r-1)$$

DESARROLLO DE $(a + x)^n$

*A*) Para valores de $n$ enteros y positivos.

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1} + \ldots + x^n$$

Este desarrollo constituye el teorema del binomio, o fórmula del binomio de Newton.

El término $r$ del desarrollo de $(a + x)^n$ es

$$\text{término } r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}x^{r-1}$$

*B*) Para valores de $n$ negativos y fraccionarios.

El teorema del binomio es válido también para valores de $n$ negativos y fraccionarios siempre que el binomio sea de la forma $(a + x)^n$, siendo el valor absoluto de $x$ menor que $a$. No obstante, cuando $n$ es un número negativo o fraccionario el desarrollo es ilimitado.

## PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular:

*a*) $\dfrac{7!}{4!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ *b*) $\dfrac{6!\,3!}{5!} = \dfrac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)(1 \cdot 2 \cdot 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 36$

*c*) $\dfrac{m!}{(m-1)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-2)(m-1)m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-2)(m-1)} = m$ Por ejemplo, $\dfrac{15!}{14!} = 15$

d) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-3)(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-3)(n-2)} = n(n-1)$. Por ejemplo, $\dfrac{18!}{16!} = 18 \cdot 17 = 306$

e) $\dfrac{(p-2)!}{(p-4)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-4)(p-3)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-4)} = (p-3)(p-2)$

f) $\dfrac{a!(a+b-2)!}{(a-2)!(a+b)!} = \dfrac{[a(a-1)(a-2)!](a+b-2)!}{(a-2)![(a+b)(a+b-1)(a+b-2)!]} = \dfrac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$

## DESARROLLO DEL BINOMIO CON EXPONENTE ENTERO Y POSITIVO

Desarrollar por la fórmula del binomio:

**2.** $(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + \dfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}ax^2 + \dfrac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$

**3.** $(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}a^2x^2 + \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}ax^3 + \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4$

$= a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$

**4.** $(a+x)^5 = a^5 + 5a^4x + \dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}a^3x^2 + \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^2x^3 + \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}ax^4 + x^5$

$= a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5$

Obsérvese que en el desarrollo de $(a+x)^n$:

1) El exponente de $a$ + el exponente de $x = n$ (es decir, el grado de cada término es $n$).

2) El número de términos es $n+1$, cuando $n$ es un número entero y positivo.

3) Hay *dos* términos medios cuando $n$ es un número entero, impar y positivo.

4) Hay *un* término medio cuando $n$ es un número entero, par y positivo.

5) Los coeficientes de los términos que equidistan de los extremos son iguales. Dichos coeficientes se pueden disponer de la forma siguiente:

| | |
|---|---|
| $(a+x)^0$ | 1 |
| $(a+x)^1$ | 1 1 |
| $(a+x)^2$ | 1 2 1 |
| $(a+x)^3$ | 1 3 3 1 |
| $(a+x)^4$ | 1 4 6 4 1 |
| $(a+x)^5$ | 1 5 10 10 5 1 |
| $(a+x)^6$ | 1 6 15 20 15 6 1 |
| etc. | |

Esta disposición de números recibe el nombre de *triángulo de Pascal*. El primero y el último término son iguales a 1 y los demás se obtienen sumando los dos números a su derecha e izquierda de la fila anterior.

**5.** $(x-y^2)^6 = x^6 + 6x^5(-y^2) + \dfrac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}x^4(-y^2)^2 + \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3(-y^2)^3 + \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^2(-y^2)^4$

$+ \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x(-y^2)^5 + (-y^2)^6$

$= x^6 - 6x^5y^2 + 15x^4y^4 - 20x^3y^6 + 15x^2y^8 - 6xy^{10} + y^{12}$

En el desarrollo de un binomio de la forma $(a - b)^n$, siendo $n$ un número entero y positivo, los términos son alternativamente positivos y negativos.

6. $(3a^3 - 2b)^4 = (3a^3)^4 + 4(3a^3)^3(-2b) + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(3a^3)^2(-2b)^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}(3a^3)(-2b)^3 + (-2b)^4$

$= 81a^{12} - 216a^9b + 216a^6b^2 - 96a^3b^3 + 16b^4$

7. $(x-1)^7 = x^7 + 7x^6(-1) + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}x^5(-1)^2 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}x^4(-1)^3 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^3(-1)^4$

$+ \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^2(-1)^5 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x(-1)^6 + (-1)^7$

$= x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$

8. $(1-2x)^5 = 1 + 5(-2x) + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(-2x)^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}(-2x)^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(-2x)^4 + (-2x)^5$

$= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$

9. $(\frac{x}{3} + \frac{2}{y})^4 = (\frac{x}{3})^4 + 4(\frac{x}{3})^3(\frac{2}{y}) + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(\frac{x}{3})^2(\frac{2}{y})^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}(\frac{x}{3})(\frac{2}{y})^3 + (\frac{2}{y})^4$

$= \frac{x^4}{81} + \frac{8x^3}{27y} + \frac{8x^2}{3y^2} + \frac{32x}{3y^3} + \frac{16}{y^4}$

10. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^6 = (x^{1/2})^6 + 6(x^{1/2})^5(y^{1/2}) + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(x^{1/2})^4(y^{1/2})^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}(x^{1/2})^3(y^{1/2})^3$

$+ \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(x^{1/2})^2(y^{1/2})^4 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(x^{1/2})(y^{1/2})^5 + (y^{1/2})^6$

$= x^3 + 6x^{5/2}y^{1/2} + 15x^2y + 20x^{3/2}y^{3/2} + 15xy^2 + 6x^{1/2}y^{5/2} + y^3$

11. $(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^4 = (x^{1/2} - x^{-1/2})^4$

$= (x^{1/2})^4 + 4(x^{1/2})^3(-x^{-1/2}) + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(x^{1/2})^2(-x^{-1/2})^2$

$+ \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}(x^{1/2})(-x^{-1/2})^3 + (-x^{-1/2})^4 = x^2 - 4x + 6 - 4x^{-1} + x^{-2}$

12. $(a^{-2} + b^{3/2})^4 = (a^{-2})^4 + 4(a^{-2})^3(b^{3/2}) + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(a^{-2})^2(b^{3/2})^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}(a^{-2})(b^{3/2})^3 + (b^{3/2})^4$

$= a^{-8} + 4a^{-6}b^{3/2} + 6a^{-4}b^3 + 4a^{-2}b^{9/2} + b^6$

13. $(e^x - e^{-x})^7 = (e^x)^7 + 7(e^x)^6(-e^{-x}) + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}(e^x)^5(-e^{-x})^2 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}(e^x)^4(-e^{-x})^3$

$+ \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(e^x)^3(-e^{-x})^4 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(e^x)^2(-e^{-x})^5$

$+ \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}(e^x)(-e^{-x})^6 + (-e^{-x})^7$

$= e^{7x} - 7e^{5x} + 21e^{3x} - 35e^x + 35e^{-x} - 21e^{-3x} + 7e^{-5x} - e^{-7x}$

**14.** $(a + b - c)^3 = [(a + b) - c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2(-c) + \dfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}(a + b)(-c)^2 + (-c)^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3$

**15.** $(x^2 + x - 3)^3 = [x^2 + (x - 3)]^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2(x - 3) + \dfrac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}(x^2)(x - 3)^2 + (x - 3)^3$

$= x^6 + (3x^5 - 9x^4) + (3x^4 - 18x^3 + 27x^2) + (x^3 - 9x^2 + 27x - 27)$

$= x^6 + 3x^5 - 6x^4 - 17x^3 + 18x^2 + 27x - 27$

En los Problemas 16-21 escribir el término indicado de cada desarrollo aplicando la fórmula

$$\text{término } r \text{ de } (a + x)^n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{(r-1)}\,a^{n-r+1}x^{r-1}$$

**16.** Sexto término de $(x + y)^{15}$. $n = 15,\ r = 6,\ n - r + 2 = 11,\ r - 1 = 5,\ n - r + 1 = 10$

$$6.^{\circ}\text{ término} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^{10}y^5 = 3\,003x^{10}y^5$$

**17.** Quinto término de $(a - \sqrt{b})^9$. $n = 9,\ r = 5,\ n - r + 2 = 6,\ r - 1 = 4,\ n - r + 1 = 5$

$$5.^{\circ}\text{ término} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^5(-\sqrt{b})^4 = 126a^5b^2$$

**18.** Cuarto término de $(x^2 - y^2)^{11}$. $n = 11,\ r = 4,\ n - r + 2 = 9,\ r - 1 = 3,\ n - r + 1 = 8$

$$4.^{\circ}\text{ término} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x^2)^8(-y^2)^3 = -165x^{16}y^6$$

**19.** Nuevo término de $(\frac{x}{2} + \frac{1}{x})^{12}$. $n = 12,\ r = 9,\ n - r + 2 = 5,\ r - 1 = 8,\ n - r + 1 = 4$

$$9.^{\circ}\text{ término} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(\frac{1}{x}\right)^8 = \frac{495}{16x^4}$$

**20.** Decimoctavo término de $(1 - \frac{1}{x})^{20}$. $n = 20,\ r = 18,\ n - r + 2 = 4,\ r - 1 = 17,\ n - r + 1 = 3$

$$18.^{\circ}\text{ término} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \ldots 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots 17}\left(-\frac{1}{x}\right)^{17} = -\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3x^{17}} = -\frac{1\,140}{x^{17}}$$

**21.** Término medio (4.º) de $(x^{1/3} - \frac{1}{2}x^{-2})^6$. $n = 6,\ r = 4,\ n - r + 2 = 4,\ r - 1 = 3,\ n - r + 1 = 3$

$$4.^{\circ}\text{ término} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x^{1/3})^3\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)^3 = 20(x)\left(-\frac{1}{8}x^{-6}\right) = -\frac{5}{2x^5}$$

**22.** Hallar el término en $x^2$ del desarrollo de $(x^3 + \frac{a}{x})^{10}$

De $(x^3)^{10-r+1}(x^{-1})^{r-1} = x^2$ se obtiene $3(10 - r + 1) - 1(r - 1) = 2$ de donde $r = 8$

$33 - 3r - r + 1 = 2$ 11

Para el 8.º término: $n = 10,\ r = 8,\ n - r + 2 = 4,\ r - 1 = 7,\ n - r + 1 = 3$

$$8.^{\circ}\text{ término} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}(x^3)^3\left(\frac{a}{x}\right)^7 = 120a^7x^2$$

**23.** Hallar el término independiente de $x$ en el desarrollo de $(x^2 - \frac{1}{x})^9$

De $(x^2)^{9-r+1}(x^{-1})^{r-1} = x^0$, se obtiene $2(9 - r + 1) - 1(r - 1) = 0$; de donde $r = 7$

Para el 7.º término: $n = 9$, $r = 7$, $n - r + 2 = 4$, $r - 1 = 6$, $n - r + 1 = 3$

$$7.^{\circ} \text{ término} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}(x^2)^3(-x^{-1})^6 = 84$$

**24.** Calcular $(1{,}03)^{10}$ con cinco cifras significativas.

$$(1{,}03)^{10} = (1 + 0{,}03)^{10} = 1 + 10(0{,}03) + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}(0{,}03)^2 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}(0{,}03)^3 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(0{,}03)^4 + \dots$$

$$= 1 + 0{,}3 + 0{,}0405 + 0{,}00324 + 0{,}00017 + \dots = 1{,}3439$$

Obsérvese que el desarrollo de $(1 + 0{,}03)^{10}$ consta de 11 términos.

**25.** Calcular $(0{,}99)^{15}$ con cuatro cifras decimales.

$$(0{,}99)^{15} = (1 - 0{,}01)^{15} = 1 + 15(-0{,}01) + \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2}(-0{,}01)^2 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}(-0{,}01)^3$$

$$+ \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(-0{,}01)^4 + \dots$$

$$= 1 - 0{,}15 + 0{,}0105 - 0{,}000455 + 0{,}000014 - \dots = 0{,}8601$$

**26.** Hallar la suma de los coeficientes del desarrollo de *a*) $(1 + x)^{10}$, *b*) $(1 - x)^{10}$.

*a*) Si $1, c_1, c_2, \dots, c_{10}$ son los coeficientes, tenemos la identidad

$$(1 + x)^{10} = 1 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{10}x^{10}. \quad \text{Hagamos } x = 1$$

Entonces $(1 + 1)^{10} = 1 + c_1 + c_2 + \dots + c_{10} =$ suma de los coeficientes $= 2^{10} = 1\,024$

*b*) Hagamos $x = 1$. Entonces $(1 - x)^{10} = (1 - 1)^{10} = 0 =$ suma de los coeficientes.

## DESARROLLO CON EXPONENTE FRACCIONARIO Y NEGATIVO

En los Problemas 27-28 escribir los cuatro primeros términos del desarrollo.

**27.** $$(a - x)^{1/3} = a^{1/3} + \frac{1}{3}a^{-2/3}(-x) + \frac{(1/3)(-2/3)}{1 \cdot 2}a^{-5/3}(-x)^2 + \frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{-8/3}(-x)^3 + \dots$$

$$= a^{1/3} - \frac{1}{3}a^{-2/3}x - \frac{1}{9}a^{-5/3}x^2 - \frac{5}{81}a^{-8/3}x^3 - \dots \qquad |x| < |a|$$

**28.** $$(1 + x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{(3/2)(1/2)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(3/2)(1/2)(-1/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \qquad |x| < 1$$

$$= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \dots$$

**29.** Calcular $\sqrt{26}$ con seis cifras significativas.

$$\sqrt{26} = (5^2+1)^{1/2} = (5^2)^{1/2} + \frac{1}{2}(5^2)^{-1/2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{1\cdot 2}(5^2)^{-3/2}$$

$$+ \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{1\cdot 2\cdot 3}(5^2)^{-5/2} + \ldots$$

$$= 5 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5^3}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5^5}\right) - \ldots = 5 + \frac{1}{10} - \frac{1}{1\,000} + \frac{1}{50\,000} - \ldots$$

$$= 5 + 0{,}1 - 0{,}001 + 0{,}00002 - \ldots = 5{,}09902$$

*Nota.* Es incorrecto calcular $\sqrt{26}$ desarrollando $(1+5^2)^{1/2}$. ¿Por qué?

**30.** Calcular $\sqrt[3]{998}$ con seis cifras significativas.

$$\sqrt[3]{998} = (10^3-2)^{1/3} = (10^3)^{1/3} + \frac{1}{3}(10^3)^{-2/3}(-2) + \frac{(1/3)(-2/3)}{1\cdot 2}(10^3)^{-5/3}(-2)^2 + \ldots$$

$$= 10 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10^2}\right) - \frac{4}{9}\left(\frac{1}{10^5}\right) - \ldots = 10 - 0{,}006667 - 0{,}000004 - \ldots = 9{,}99333$$

**31.** Escribir el sexto término del desarrollo de $(1-x^2)^{1/2}$.

$$n = 1/2,\ r = 6,\ n-r+2 = -7/2,\ r-1 = 5,\ n-r+1 = -9/2$$

$$6.^{\circ}\text{ término} = \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)(-7/2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(-x^2)^5 = -\frac{7}{256}x^{10}$$

En los Problemas 32-36 escribir los cuatro primeros términos del desarrollo.

**32.** $(a+x)^{-1} = a^{-1} + (-1)a^{-2}x + \dfrac{(-1)(-2)}{1\cdot 2}a^{-3}x^2 + \dfrac{(-1)(-2)(-3)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-4}x^3 + \ldots$

$= a^{-1} - a^{-2}x + a^{-3}x^2 - a^{-4}x^3 + \ldots$ válido para $|x| < |a|$

**33.** $(1-x)^{-2} = 1 + (-2)(-x) + \dfrac{(-2)(-3)}{1\cdot 2}(-x)^2 + \dfrac{(-2)(-3)(-4)}{1\cdot 2\cdot 3}(-x)^3 + \ldots$

$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ válido para $|x| < 1$

**34.** $(1-x)^{-4} = 1 + (-4)(-x) + \dfrac{(-4)(-5)}{1\cdot 2}(-x)^2 + \dfrac{(-4)(-5)(-6)}{1\cdot 2\cdot 3}(-x)^3 + \ldots$

$= 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \ldots$

**35.** $(2+x)^{-3} = 2^{-3} + (-3)(2^{-4})x + \dfrac{(-3)(-4)}{1\cdot 2}(2^{-5})x^2 + \dfrac{(-3)(-4)(-5)}{1\cdot 2\cdot 3}(2^{-6})x^3 + \ldots$

$= \dfrac{1}{8} - \dfrac{3}{16}x + \dfrac{3}{16}x^2 - \dfrac{5}{32}x^3 + \ldots$ válido para $|x| < 2$

**36.** $(9+x)^{-1/2} = 9^{-1/2} + (-1/2)(9^{-3/2})x + \dfrac{(-1/2)(-3/2)}{1\cdot 2}(9^{-5/2})x^2$ válido para $|x| < 9$

$+ \dfrac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{1\cdot 2\cdot 3}(9^{-7/2})x^3 + \ldots = \dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{54} + \dfrac{x^2}{648} - \dfrac{5x^3}{34\,992} + \ldots$

**37.** Escribir el quinto término del desarrollo de $(\sqrt{x/y} - \sqrt{y/x})^{-4}$.

$n = -4,\ r = 5,\ n - r + 2 = -7,\ r - 1 = 4,\ n - r + 1 = -8$

$$5.^{\circ}\ \text{término} = \frac{(-4)(-5)(-6)(-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{x^{1/2}}{y^{1/2}}\right)^{-0}\left(-\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}\right)^{4} = 35x^{-6}y^{6}$$

**38.** Escribir los cuatro primeros términos del desarrollo de $(1 + \frac{1}{n})^n$.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \ldots$$

# PROBLEMAS PROPUESTOS

**39.** Calcular los cocientes siguientes:

*a)* $\dfrac{6!}{3!}$ *b)* $\dfrac{8!}{5!}$ *c)* $\dfrac{10!}{6!\,4!}$ *d)* $\dfrac{12!}{7!\,3!\,2!}$ *e)* $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ *f)* $\dfrac{n!}{(n-3)!\,3!}$ *g)* $\dfrac{(n-1)!\,4!}{(n+2)!}$

**40.** Desarrollar por la fórmula del binomio.

*a)* $(x + \frac{1}{2})^6$ *c)* $(y + 3)^4$ *e)* $(x^2 - y^3)^4$ *g)* $(\frac{x}{2} + \frac{3}{y})^4$

*b)* $(x - 2)^5$ *d)* $(x + \frac{1}{x})^5$ *f)* $(a - 2b)^6$ *h)* $(y^{1/2} + y^{-1/2})^6$

**41.** Escribir el término indicado en los siguientes desarrollos.

*a)* Quinto término de $(a - b)^7$

*b)* Séptimo término de $(x^2 - \frac{1}{x})^9$

*c)* Término medio de $(y - \frac{1}{y})^8$

*d)* Octavo término de $(\frac{x^2}{2} - 2y)^{16}$

*e)* Séptimo término de $(a - \frac{1}{\sqrt{a}})^{10}$

*f)* Decimosexto término de $(2 - 1/x)^{18}$

*g)* Sexto término de $(x^2 - 2y)^{11}$

*h)* Onceavo término de $(x + \frac{1}{\sqrt{x}})^{14}$

**42.** Hallar el término independiente del desarrollo de $(\sqrt{x} + \frac{1}{3x^2})^{10}$

**43.** Hallar el término en $x^3$ del desarrollo de $(x^2 + \frac{1}{x})^{12}$.

**44.** Calcular $(0{,}98)^6$ con cinco cifras decimales.

**45.** Calcular $(1{,}1)^{10}$ con una aproximación de una centésima.

**46.** Escribir los cuatro primeros términos de los desarrollos siguientes:

*a)* $(1 + 2x)^{-1}$ *c)* $(a + x)^{-1/2}$ *e)* $(1 + x)^{1/3}$ *g)* $(4 + x)^{1/2}$

*b)* $(1 - y)^{-3}$ *d)* $(1 + r)^{-6}$ *f)* $(1 - 3y)^{-1/3}$ *h)* $(1 + \frac{1}{s})^{-2/3}$

**47.** Calcular con la aproximación indicada:

*a*) $\sqrt{17}$ ; con cuatro cifras significativas

*b*) $\sqrt[3]{28}$ ; con tres cifras decimales

*c*) $\sqrt[5]{34}$ ; con aproximación de una centésima

*d*) $\sqrt[5]{1,01}$ ; con cinco cifras decimales

**48.** Escribir el decimosexto término del desarrollo de $(x + \frac{2}{x})^{-5}$.

*SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS*

**39.** *a*) 120 *b*) 336 *c*) 210 *d*) 7 920 *e*) $2n(2n+1)$ *f*) $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{5}$ *g*) $\dfrac{24}{n(n+1)(n+2)}$

**40.** *a*) $x^6 + 3x^5 + \frac{15}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{1}{64}$

*b*) $x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$

*c*) $y^4 + 12y^3 + 54y^2 + 108y + 81$

*d*) $x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}$ *e*) $x^8 - 4x^6y^3 + 6x^4y^6 - 4x^2y^9 + y^{12}$

*f*) $a^6 - 12a^5b + 60a^4b^2 - 160a^3b^3 + 240a^2b^4 - 192ab^5 + 64b^6$

*g*) $\frac{x^4}{16} + \frac{3x^3}{2y} + \frac{27x^2}{2y^2} + \frac{54x}{y^3} + \frac{81}{y^4}$ *h*) $y^3 + 6y^2 + 15y + 20 + 15y^{-1} + 6y^{-2} + y^{-3}$

**41.** *a*) $35a^3b^4$ *c*) 70 *e*) $210a$ *g*) $-14\,784x^{12}y^5$

*b*) 84 *d*) $-2\,860x^{18}y^7$ *f*) $-\dfrac{6\,528}{x^{15}}$ *h*) $\dfrac{1\,001}{x}$

**42.** 5 **43.** $792x^3$ **44.** 0,88584 **45.** 2,59

**46.** *a*) $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots \quad |x| < \frac{1}{2}$ *e*) $1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \dots$

*b*) $1 + 3y + 6y^2 + 10y^3 + \dots \quad |y| < 1$ *f*) $1 + y + 2y^2 + \frac{14}{3}y^3 + \dots$

*c*) $a^{-1/2} - \frac{1}{2}a^{-3/2}x + \frac{2}{8}a^{-5/2}x^2 - \frac{5}{16}a^{-7/2}x^3 + \dots$ *g*) $2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{512} - \dots$

*d*) $1 - 6r + 21r^2 - 56r^3 + \dots$ *h*) $1 - \frac{2}{3s} + \frac{5}{9s^2} - \frac{40}{81s^3} + \dots \quad |s| > 1$

**47.** *a*) 4,123 *b*) 3,037 *c*) 2,02 *d*) 1,00199

**48.** $-\dfrac{4\,032}{x^{15}}$