Matemáticas 5 (geometría analítica), ago-dic 2011

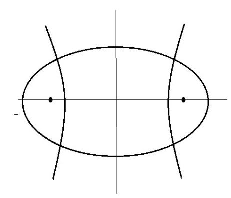
Guía para el exámen núm 2

1. Cada una de las siguientes ecuaciones describe alguna curva de segundo grado en el plano: circunferencia, parábola, elipse, hipérbola o un "caso degenerado"(par de rectas, una sola recta, un punto, o el conjunto vacío). Tienes que indentificar la curva, y encontrar: en caso de circunferencia - el centro y el radio, en caso de parábola - el foco y la directriz, en caso de elipse – los focos, los tama nos de los ejes (mayor y menor), el centro y los vertices, en caso hipérbola – los focos, los v;ertices y las asíntotas. Tambien hay que dibujar la curva.

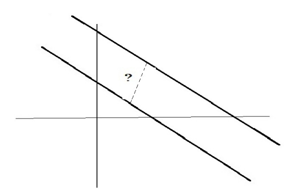
   a) $x^2 + 4x + y^2 + 8y + 19 = 0$
   b) $x^2 + 4x + 2y^2 + 16y + 19 = 0$
   c) $x^2 + 4x - 2y^2 + 16y + 19 = 0$
   d) $x^2 + 4x + 16y + 19 = 0$
   e) $x^2 + 4x + 16y^2 + 19 = 0$
   f) $x^2 + 4x + 16y^2 + 8y = 0$
   g) $x^2 + 4x + 8y^2 + 16y + 12 = 0$
   h) $x^2 + 4x - 2y^2 + 16y - 19 = 0$

2. Consideramos una elipse y una hipérbola *confocales* (tienen los mismos focos). Demuestra que en cada uno de sus 4 puntos de intersección, las tangentes a las curvas son perpendiculares.

   Sugerencia: digamos que los focos comunes están en $(\pm a, 0)$. Demuestra que las ecuaciones de la elipse y la hipérbola son ambas de la forma $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 - a^2} = 1$, donde para la elipse $A^2 > a^2$ y para la hipérbola $a^2 > A^2 > 0$. Ahora usa las fórmulas que hemos aprendido para la pendiente de la tangente a una cónica en un punto.

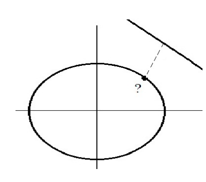


3. Encuentra la distancia entre las rectas $x + 2y = 3$ y $x + 2y = 4$.

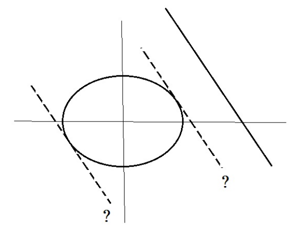


4. Considera el lugar geométrico de los puntos P en el plano que pertenecen a un segmento AB de longitud 1 y tal que (1) A está sobre el eje de y, (2) B está sobre el eje de x, (3) la distancia de P a A es el doble de la distancia de P a B. Demuestra que este lugar geométrico es una elipse, encuentra su ecuación, focos, tamaño de ejes, y dibuja la elipse.

5. Encuentra el punto más cercano de la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ a la recta $x + 2y = 10$.



6. Encuentra dos rectas paralelas a la recta $x + y = 5$ que son tangentes a la elipse $2x^2 + 3y^2 = 4$.



7.
   a) Encuentra un punto F, una recta l y un número $p > 0$ tal que el lugar geométrico de todos los puntos P cuyo distancia a l es p veces su distancia a F sea la elipse $3x^2 + 2y^2 = 1$.
   b) Mismo para la hipérbola $3x^2 - 2y^2 = 1$.

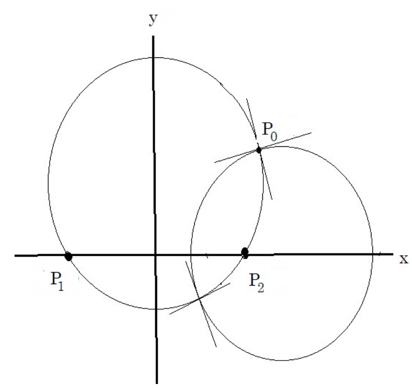
   Sugerencia: toma como F a unos de los focos y l una recta vertical.

8. Encuentra el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de distancias al punto $(1, 0)$ y la recta $x = 2$ es 3.

9. Encuentra los valores de c para los cuales la recta $x + 2y = c$ intersecta la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en (a) 1 punto (b) 2 puntos (c) ningun punto.

10. Dibuja en el plano con coordenadas b, c el lugar geométrico de los puntos (b, c) tal que la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ tiene (i) 1 solución (ii) 2 soluciones (iii) ninguna solución.

11. Sean $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$ y $P_0 = (a, b)$, con $b \neq 0$

    a) Encuentra el centro, el radio y la ecuación del círculo que pasa por P_0, P_1, P_2.

    b) Encuentra el lugar geometrico de los puntos P en el plano tal que su razon de distancias a P_1 y P_2 sea lo mismo que para P_0. Es decir, $dist(P, P_1)/dist(P, P_2) = dist(P_0, P_1)/dist(P_0, P_2)$. Demuestra que este lugar geométrico es una circunferencia que pasa por P_0 y encuentra su centro, radio y ecuación.

    c) Demuestra que para cada uno de los dos puntos de intersección de las dos circunferencias de los dos incisos anteriores, las tangentes a las circunferencias son perpendiculares.

12. Sean a, b, c tres constantes con $a \neq 0$. Encuentra el vértice, foco y directriz de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ en términos de a, b, c.