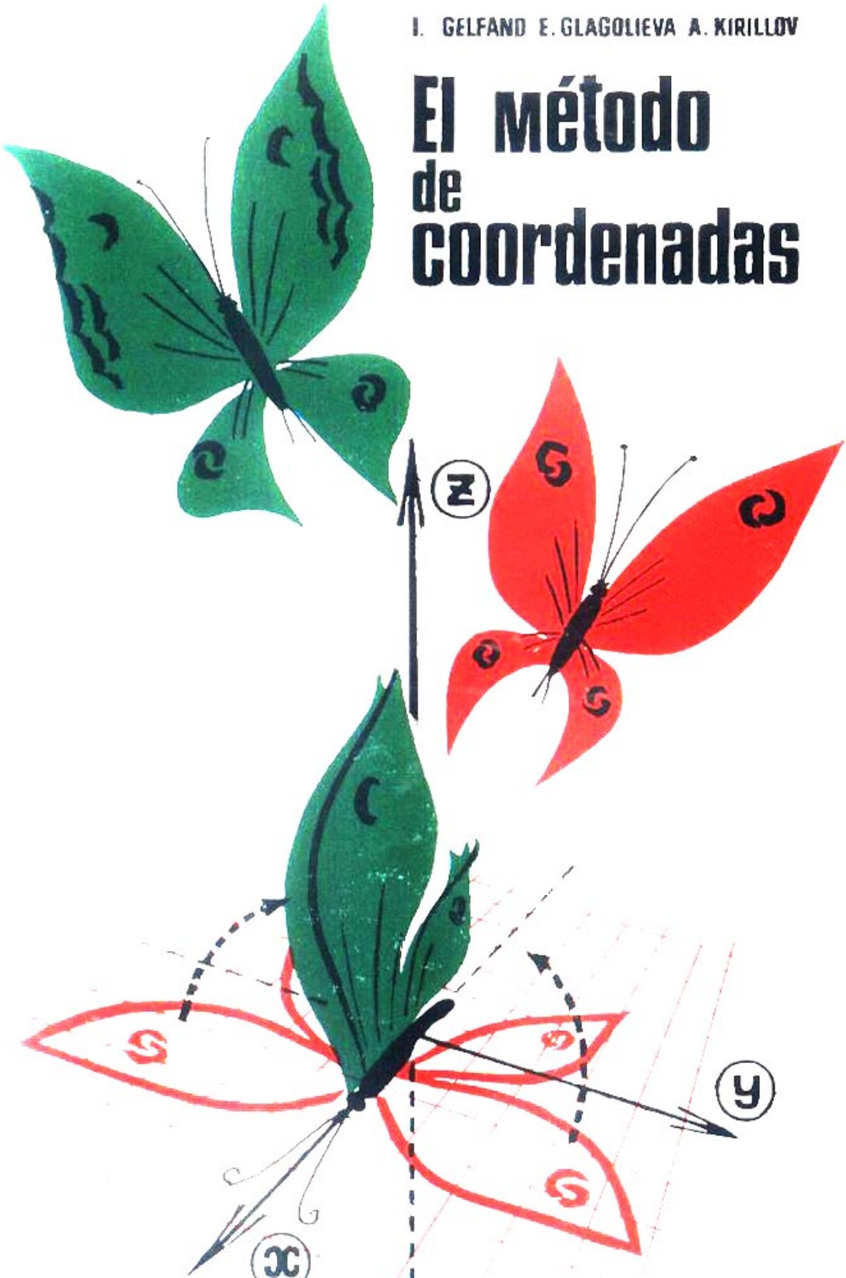
I. GELFAND E. GLAGOLIEVA A. KIRILLOV

El método de coordenadas



EL MÉTODO DE COORDENADAS

И. М. ГЕЛЬФАНД, Е. Г. ГЛАГОЛЕВА, А. А. КИРИЛЛОВ

МЕТОД КООРДИНАТ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» • МОСКВА

I. GELFAND, E. GLAGOLIEVA,
A. KIRILLOV

El METODO DE COORDENADAS

EDITORIAL MIR
MOSCU

Primera edición 1968
Primera reimpresión 1973
Segunda reimpresión 1981
Tercera reimpresión 1987

Impreso en la URSS

На испанском языке

Indice

Prólogo

Para leer este libro no se requieren conocimientos especiales, sino sólo aquellos que están contenidos en el programa escolar del noveno grado. No obstante, este libro está escrito para estudiarlo sistemáticamente y no para leerlo someramente; por esto, su lectura puede resultar algo difícil. Para facilitarle su trayectoria por el libro introduciremos en los márgenes "las señales del tránsito". Cuando lea, ponga atención en ellas.

La señal "Estacionamiento permitido" destaca aquellas partes que contienen conocimientos básicos, para la comprensión de los materiales ulteriores, tales como: definiciones, fórmulas, etc. Frente a este signo debe detenerse, leer esta parte varias veces e imprescindiblemente memorizarla.

La señal "Pendiente empinada" se encuentra en aquellos lugares que contienen el material más difícil. Si esta parte está escrita con caracteres pequeños, se puede leerla después.

Cuando vea la señal "Curva peligrosa", ponga especial atención. Frecuentemente esta señal se encuentra en aquellas partes que a primera vista parecen ser fáciles y simples. Sin embargo, si no se analizan con la debida atención, más adelante pueden producirse serios errores.

La solución de problemas tiene un valor significativo. !Resuélvalos, obligatoriamente! Le deseamos éxito en los estudios.

Los autores

Introducción

Cuando Ud. lea en el periódico un comunicado referente al lanzamiento de un nuevo sputnik, ponga atención a las siguientes palabras: "El sputnik se puso en una órbita muy próxima a la calculada." ¿Ha pensado Ud. cómo es posible hacer este cálculo, o sea, determinar numéricamente la órbita del sputnik que es una línea? Pues, para esto es necesario ser capaz de traducir los conceptos geométricos al lenguaje numérico y sobre todo saber determinar numéricamente la situación de un punto en el espacio (en el plano, en la superficie de la Tierra, etc.).

El método de coordenadas es un procedimiento para determinar la posición de un punto o de un cuerpo mediante números u otros símbolos.

Los números, mediante los cuales se determina la posición de un punto se llaman *coordenadas* del mismo.

Las coordenadas geográficas, que Uds. conocen muy bien, determinan la situación de un punto en una superficie (en la superficie de la Tierra); cada punto de la superficie terrestre tiene dos coordenadas: la longitud y la latitud.

Para determinar la situación de un punto en el espacio se necesitan tres números en vez de dos. Por ejemplo, para determinar la posición de un sputnik se puede indicar, además de la longitud y la latitud del punto sobre el cual se encuentra, la altura de éste sobre la superficie terrestre.

Si se conoce la trayectoria del sputnik, es decir, la línea por la cual se mueve, para determinar su posición en esta línea es suficiente dar un número; por ejemplo, se puede indicar la distancia recorrida por el sputnik desde algún punto de la trayectoria. [1]

El método de coordenadas se aplica exactamente igual para determinar la posición de un punto en la vía férrea: se indica el número del poste de kilometraje. Este número es la coordenada del punto en la vía férrea. Por ejemplo, en la designación "Plataforma-kilómetro 42", el número 42 es la coordenada de la estación.

En el juego del ajedrez se emplean unas coordenadas peculiares, la posición de las piezas en el tablero se determina mediante letras y números. Las filas verticales de los escaques se designan por letras del alfabeto latino y las horizontales, por cifras. A cada escaque del tablero le corresponde una letra que indica la fila vertical en la cual se encuentra el escaque y una cifra que indica la fila horizontal. En nuestro dibujo el peón blanco se encuentra en el

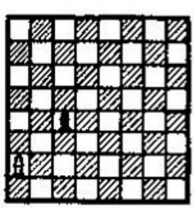


Fig. 1

[1] A veces se dice que la línea tiene una dimensión, la superficie dos y el espacio tres dimensiones. Con otras palabras, el número de dimensiones de una línea, de una superficie o del espacio es el número de coordenadas que determinan, en cada caso, la posición de un punto.

escaque *a2*, y el negro, en el *c4*. De este modo, se puede considerar que *a2* son las coordenadas del peón blanco y *c4*, las del negro.

La aplicación de coordenadas permite jugar al ajedrez por correspondencia. Para comunicar la jugada no es necesario dibujar el tablero y la disposición de las figuras, sino es suficiente decir, por ejemplo: "el gran maestro jugó *e2 — e4*" y ya todos sabrán cómo empezó la partida.

Las coordenadas que se emplean en las matemáticas permiten determinar numéricamente la posición de un punto cualquiera del espacio, del plano o de la línea. Esto da la posibilidad de "cifrar" diversos tipos de figuras, o sea, representarlas numéricamente. En el ejercicio 1 del párrafo 4 Ud. encontrará un ejemplo de cifrado semejante.

El método de coordenadas tiene una importancia especial, por cuanto permite el empleo de las máquinas calculadoras modernas no sólo en los cómputos de diferentes tipos, sino también para la resolución de problemas geométricos y para la investigación de relaciones y de elementos geométricos de cualquier naturaleza.

Capítulo I

§ 1. Las coordenadas del punto en la recta

Comenzaremos el estudio de las coordenadas que se emplean en las matemáticas, analizando el caso más simple: la determinación de la posición de un punto en una recta.

1. El eje numérico

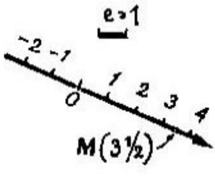


Fig. 1

Para determinar la posición de un punto en una recta se procede del modo siguiente: se elige en la recta un punto u *origen de referencia* (un punto cualquiera O), *una unidad de medida* (el segmento e) y *una dirección*, la cual se considera positiva (en la fig. 1 está indicada con una flecha).

El eje numérico es la recta en la que están indicados el origen de referencia, la unidad de medida y la dirección positiva. Para determinar la posición de un punto en el eje numérico es suficiente designar un número, por ejemplo $+5$. Esto significa que el punto se encuentra a una distancia de 5 unidades de medida del origen de referencia en la dirección positiva.

La *coordenada* de un punto en el eje numérico, es el número que determina la posición del punto en este eje.

La coordenada del punto en el eje numérico es igual a la distancia entre el punto y el origen de referencia, la cual se expresa en la unidad de medida elegida y se considera con signo más, si el punto se encuentra en la dirección positiva del origen, y con signo menos en el caso contrario. Frecuentemente, el origen de referencia se llama *origen de coordenadas*. La coordenada del origen (el punto O) es igual a cero.

Se emplean notaciones del siguiente tipo: $M(-7)$, $N(a)$, etc. La primera de ellas designa el punto M con coordenada menos siete y la segunda, el punto N con coordenada a. Generalmente, en forma abreviada se dice: "el punto menos siete", "el punto a", etc.

De esta forma hemos establecido una correspondencia entre los números y los puntos de la línea recta. De donde resulta, que a cada punto de la recta corresponde un número determinado: su coordenada, y a cada número (en esta misma correspondencia), un punto determinado de la recta; a dos puntos diferentes corresponden dos números distintos. En matemática, este tipo de correspondencia se llama correspondencia *biunívoca*. A primera vista, parece que es muy simple establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los números. Sin embargo, cuando los matemáticos pensaron en esto, resultó que para explicar el sentido exacto de las palabras que forman esta frase, era necesario crear una gran teoría complicada. Así pues, inmediatamente surgen dos simples preguntas difíciles de contestar: ¿Qué es número? y ¿Qué se debe entender por punto?

Estos problemas se refieren a los llamados fundamentos de la geometría y a la axiomática de los números. Más adelante, en otras nuestras publicaciones, estudiaremos estos problemas más detalladamente.

A pesar de que la cuestión sobre la determinación de la situación de un punto en la recta es excesivamente simple, es necesario analizarla atentamente para habituarse a ver en las relaciones numéricas, las geométricas y viceversa.

Hágase un control.

Si Ud. comprendió correctamente el párrafo 1, sin ninguna dificultad resolverá los ejercicios que le proponemos. Si no puede resolver estos ejercicios significará que Ud. omitió algo o no lo comprendió. Entonces, vuelva atrás y lea nuevamente este apartado.

Ejercicios.

1. a) Marque en el eje numérico los puntos $A(-2)$, B $(13/3)$, $K(0)$

b) Marque en el eje numérico el punto $M(2)$. Encuentre en el eje numérico dos puntos A y B que estén a la distancia de tres unidades del punto M. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos A y B?

2. a) Se sabe que el punto $A(a)$ se encuentra a la derecha[1] del punto $B(b)$. ¿Cuál número es mayor a o b?

b) Sin dibujar los puntos en el eje numérico, diga ¿cuál de los dos puntos está más a la derecha: $A(-3)$ ó $B(-4)$, $A(3)$ ó $B(4)$, $A(-3)$ ó $B(4)$, $A(3)$ ó $B(-4)$?

3. ¿Cuál de los dos puntos está más a la derecha: $A(a)$ ó $B(-a)$?

---

[1] Aquí y más adelante se supone que la situación del eje es horizontal y la dirección positiva es la que va de la izquierda hacia la derecha.

Respuesta. No se sabe, ya que depende del valor que adquiera a. Si a es un número positivo, A se encuentra a la derecha de B; si a es un número negativo, entonces B está a la derecha de A pero, si $a=0$, los puntos A y B coinciden.

4. Piense cuál de los dos puntos está a la derecha: a) $M(x)$ ó $N(2x)$; b) $A(c)$ ó $B(c+2)$; c) $A(x)$ ó $B(x^2)$; d) $A(x)$ ó $B(x-a)$.

Respuesta al ejercicio 4d. Si a es mayor que cero, a la derecha estará A; si a es menor que cero, entonces a la derecha estará B. Si $a=0$, A y B coinciden.

5. Marque en el eje numérico los puntos $A(-5)$ y $B(7)$. Encuentre la coordenada del punto medio del segmento AB.

6. Señale en el eje numérico, con un lápiz rojo, los puntos cuyas coordenadas son: a) números enteros; b) números positivos.

7. Señale en el eje numérico todos los puntos x, para los cuales se cumple: a) $x<2$; b) $x\geqslant 5$; c) $2<x<5$; d) $-3^1/_4\leqslant x\leqslant 0$; e) $x-3<$ <5; f) $x^2<1$.

2. *El valor absoluto del número*

El valor absoluto de un número a (o *módulo* del número a) es la distancia desde el punto $A(a)$ hasta el origen de coordenadas.

El módulo del número a se designa colocando el número a entre unas líneas verticales: $|a|$, es el módulo de a.

Ejemplo, $|-3|=3$, $|^1/_2|=^1/_2$.

Como los puntos a y $-a$ están situados a igual distancia del origen de coordenadas, los números a y $-a$ tienen igual valor absoluto: $|a|=|-a|$.

De aquí se deduce que

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad a > 0, \quad \text{entonces}, \quad |a| = a, \\ &\text{si} \quad a < 0, \quad \text{entonces}, \quad |a| = -a, \\ &\text{si} \quad a = 0, \quad \text{entonces}, \quad |a| = 0. \end{aligned}$$

Ejercicios.

1. ¿Dónde están situados en el eje numérico los puntos x, para los cuales se cumple: a) $x=2$; b) $|x|>3$; c) $|x|\leqslant 5$; d) $3<|x|<5$?

Resolución del ejercicio 1b. Si x es un número positivo, entonces $|x|=x$, y por consiguiente, $x>3$; si x es un número negativo, entonces $|x|=-x$, en este caso, de la desigualdad $-x>3$ se deduce que $x<-3$.

Respuesta al ejercicio 1b. Los puntos están situados a la izquierda del punto -3 y a la derecha del punto 3. Esta respuesta se puede obtener más rápidamente, si se tiene en cuenta que $|x|$ es la distancia del punto x al origen de coordenadas. Entonces, es evidente que los puntos buscados están situados a una distancia mayor que 3 del origen de coordenadas.

2. ¿Cómo escribir sin signo de módulo las siguientes expresiones: a) $|a^2|$; b) $|a-b|$, si $a>b$; c) $|a-b|$, si $a<b$; d) $|-a|$, si a es un número negativo?

3. ¿Cuáles son los valores que puede tomar la expresión $\frac{|x|}{x}$?

4. Se sabe que $|x-3|=x-3$. ¿Qué valores puede tomar x?

5. Señale en el eje numérico donde están situados los puntos, para los cuales se cumple: $|x-2|=2-x$.

6. Resuelva las ecuaciones: a) $|x-2|=3$; b) $|x+1|+|x+2|=2$; c) $|x+1|+|x+2|=1$.

Resolución del ejercicio 6b. Como $|a|=a$ para $a\geqslant 0$ y $|a|=-a$ para $a<0$, las expresiones $|x+1|$ y $|x+2|$ «se abren» de diferente forma, según sea el signo que tengan las expresiones comprendidas bajo el signo módulo. Por esto, dividamos todo el conjunto de valores de x en tres partes (fig. 2).

$$x\geqslant -1,$$
$$-2<x<-1,$$
$$x\leqslant -2,$$

y estudiemos cada una de ellas separadamente.[1]

1) $x\geqslant -1$. Para estos valores de x tenemos:

$$x+1\geqslant 0 \quad \text{y} \quad x+2>0.$$

Por consiguiente, $|x+1|=x+1$ y $|x+2|=x+2$. La ecuación *b*) tiene la forma $2x+3=2$. La raíz de esta ecuación $-1/2$ satisface a nuestra condición $x\geqslant -1$.

2) Para $-2<x<-1$ la ecuación toma la forma $1=2$ (¡Compruébelo!). Esto significa que ningún valor contenido entre -2 y -1 satisface a la ecuación b).

3) El caso $x\leqslant -2$ véalo Ud. mismo.

Respuesta al ejercicio 6b. La ecuación $|x+1|+|x+2|=2$ tiene dos raíces: $-1/2$ y $-5/2$.

Respuesta al ejercicio 6c. La ecuación tiene infinitas soluciones: el conjunto de todas las soluciones está comprendido en el segmento $-2\leqslant x\leqslant -1$; es decir, todo número mayor o igual a -2 y menor o igual a -1 satisface a la ecuación.

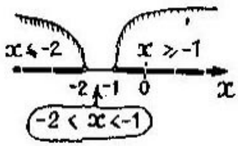


Fig. 2

3. *Distancia entre dos puntos*

Comenzaremos con unos ejercicios. Hállese la distancia entre los

[1] Los límites de cada una de estas partes son aquellos puntos, en los que se anula una de las expresiones contenida bajo el signo módulo.

puntos

a) $A(-7)$ y $B(-2)$;

b) $A\left(-3\frac{1}{2}\right)$ y $B(-9)$.

Es fácil resolver estos problemas, ya que conociendo las coordenadas de los puntos se puede analizar qué punto está más a la derecha y cuál más a la izquierda, cómo están situados con respecto al origen de coordenadas, etc. Después de esto, es muy fácil darse cuenta cómo se calcula la distancia buscada.

Ahora le proponemos a Ud. deducir una fórmula general para calcular la distancia entre dos puntos del eje númerico, es decir, resolver este problema:

Problema. Dados dos puntos $A(x_1)$ y $B(x_2)$, determinar la distancia ρ (A, B) entre ellos.[1]

Solución. Como los valores particulares de las coordenadas de los puntos son desconocidos, es necesario analizar todos los casos posibles de la posición relativa de los puntos A, B y el origen de coordenadas O.

Tales casos son seis. Primeramente veamos tres casos en los que el punto B está a la derecha de A (fig. 3).

En el primero de ellos (fig. 3, *a*) la distancia $\rho(A, B)$ es igual a la diferencia entre las distancias de los puntos A y B respectivamente al origen de coordenadas. Como

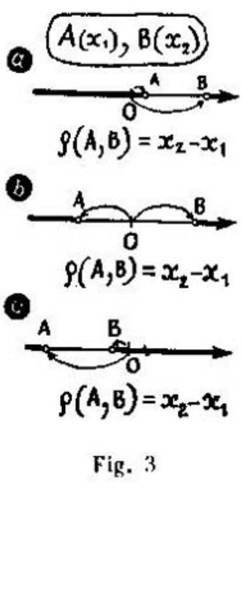


Fig. 3

[1] Generalmente, para la designación de distancia se emplea la letra griega ρ («ro»). La expresión $\rho(A, B)$ representa la distancia entre los puntos A y B.

en este caso x_1 y x_2 son positivos, se tiene:

$$\rho(A, B) = x_2 - x_1.$$

En el segundo caso (fig. 3, *b*), la distancia es igual a la suma de las distancias respectivas de los puntos B y A al origen de coordenadas, es decir:

$$\rho(A, B) = x_2 - x_1,$$

puesto que en este caso x_2 es positivo y x_1 es negativo.

Demuestre que en el tercer caso (fig. 3, *c*) la distancia se calcula por la misma fórmula.

Los otros tres casos (fig. 4) se diferencian de los analizados solamente en que los puntos A y B han cambiado sus funciones. Se puede comprobar que en cada uno de estos casos la distancia entre los puntos A y B es igual a

$$\rho(A, B) = x_1 - x_2.$$

De este modo en todos los casos cuando $x_2 > x_1$, la distancia $\rho(A, B)$ es igual a $x_2 - x_1$ y, en todos los casos, para $x_1 > x_2$, esta distancia es igual a $x_1 - x_2$. Recordando la definición de módulo, esto se puede escribir mediante una fórmula única, válida para los seis casos:

$$\rho(A, B) = |x_2 - x_1|.$$

Si se desea, se puede anotar esta fórmula en la forma

$$\rho(A, B) = |x_1 - x_2|.$$

Si se es demasiado meticuloso es necesario analizar otro caso, cuando $x_2 = x_1$, es decir, cuando los

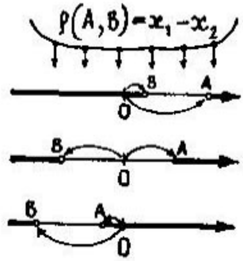


Fig. 4

puntos A y B coinciden. Es evidente que aún en este caso

$$\rho(A, B) = |x_2 - x_1|.$$

De esta forma el problema está completamente resuelto.

Ejercicios.

1. Señale en el eje numérico los puntos x, para los cuáles se cumple a) $\rho(x, 7) < 3$; b) $|x-2| > 1$; c) $|x+3| = 3$.

2. En el eje numérico se dan dos puntos $A(x_1)$ y $B(x_2)$. Encontrar la coordenada del punto medio del segmento AB.

Observación. Al resolver este problema Ud. debe estudiar todos los casos posibles de ubicación de los puntos A y B en el eje numérico o bién, escribir una solución tal que sea inmediatamente válida para todos los casos.

3. Hallar la coordenada de un punto que está situado en el numérico de tal modo que su distancia al punto $A(-9)$ es tres veces menor que su distancia al punto $B(-3)$.

4. Resuelva ahora las ecuaciones del ejercicio 6 del apartado 2 empleando el concepto de distancia entre dos puntos.

5. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $|x+3| + |x-1| = 5$;
b) $|x+3| + |x-1| = 4$;
c) $|x+3| + |x-1| = 3$;
d) $|x+3| - |x-1| = 5$;
e) $|x+3| - |x-1| = 4$;
f) $|x+3| - |x-1| = 3$.