Calculo III, ago-dic 2011.

Tarea num. 15

(Para el 1 dic, 2011)

Definición. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Dados dos bases (ordenadas) de V, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$, se dice que B y B' tienen la misma orientación si la transformación lineal $T : V \to V$ dada por $Tv_i = v'_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, tiene $\det T > 0$.

Proposición 1. La relación "tener la misma orientación" define una relación de equivalencia en el conjunto de bases en V; ademas, esta relación define exactamente dos clases de equivalencia.

Definición. Una orientación en un espacio vectorial real V de dimensión finita es la elección de una de las dos clases de equivalencia de bases en V. Las bases en la clase de equivalencia seleccionada se llaman bases con orientación positiva (o positivamente orientadas). Si V tiene orientación se dice que V está orientado.

La orientación canónica (o estandar) en $\mathbb{R}^n$ es la de orientación determinada por la base canónica.

Definición. Sea V un espacio euclideano (un espacio vectorial real equipado con un producto escalar $\langle \cdot\, , \,\cdot \rangle$). Dados dos vectores $v_1, v_2 \in V$ se define el paralelogramo generado por v_1, v_2 como el conjunto $\{c_1 v_1 + c_2 v_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq c_1, c_2 \leq 1\}$. El área de este paralelogramo se denota por $Area(v_1, v_2)$ y se define por $Area(v_1, v_2) = \|v_1\| \|v_2\| \operatorname{sen} \theta = \sqrt{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2}$, donde $\theta \in [0, \pi]$ es el ángulo entre v_1, v_2.

Proposición 2. Si V es un espacio euclideano 2 dimensional y $v_1, v_2 \in V$ entonces $Area(v_1, v_2) = |\det(A)|$, donde A es la matriz 2×2 cuyas columnas son las coordenadas de v_1, v_2 con respecto a una base ortonormal de V.

Proposición 3. Sea V un espacio euclideano 3-dimensional orientado. Dados $v_1, v_2 \in V$ existe un único vector $v_3 \in V$ tal que: (1) $v_3 \perp v_1, v_2$; (2) $\|v_3\| = Area(v_1, v_2)$; (3) Si v_1, v_2 son linealmente independientes entonces v_1, v_2, v_3 es una base positivamente orientada de V.

Definición. El vector v_3 de la proposición anterior se llama el producto vectorial de v_1 y v_2 y se denota por $v_1 \times v_2$.

Problemas

1. Sea V un espacio euclideano y $v_1, v_2 \in V$. Demuestra: $Area(v_1, v_2) = 0$ ssi v_1, v_2 son linealmente dependientes.

2. Demuesta la proposición 2 de arriba.

3. Demuesta la proposición 3 de arriba.

4. Sea V un espacio euclideano 3-dimensional orientado, con el producto vectorial asociado.

   a) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal ortogonal con $det(T) = 1$. Demuestra: para todo $v_1, v_2 \in V$, $T(v_1 \times v_2) = Tv_1 \times Tv_2$.

      Sugerencia: demuestra que $v_3 := T^{-1}(Tv_1 \times Tv_2)$ cumple las 3 propiedades de la proposición 3.

b) Dados dos vectores $v, v' \in V$ con $\|v\| = \|v'\|$, existe una transformación ortogonal $T : V \to V$ con $det(T) = 1$ tal que $Tv = v'$.

Sugerencia: completa v y v' a bases ortonormales positivamente orientadas.

c) Sea $V = \mathbb{R}^3$ equipado con el producto escalar y la orientación estandar. Demuestra: para todo $v_1, v_2, v_3 \in V$, $\langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle = det(v_1, v_2, v_3)$, donde $det(v_1, v_2, v_3)$ denota la determinante de la matriz 3×3 cuyas columnas son v_1, v_2, v_3.

d) Generaliza el inciso anterior para cualquer espacio euclideano V orientado 3-dimensional.

Sugerencia: $\langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle = det([v_1], [v_2], [v_3])$, donde $[v_i]$ es el vector de coordenadas de v_i con respecto a una base ortonormal positivamente orientada.

e) El prudcto vectorial es: (1) bilineal ($v_1 \mapsto v_1 \times v_2$ y $v_2 \mapsto v_1 \times v_2$ son lineales); (2) antisimétrico ($v_1 \times v_2 = -v_2 \times v_1$); (3) satisface la identidad de Jacobi: $(v_1 \times v_2) \times v_3 + (v_2 \times v_3) \times v_1 + (v_3 \times v_1) \times v_2 = 0$.

5. Sea V un espacio euclideano 3-dimensional orientado. Para todo $v \in V$ define $T_v : V \to V$ por $T_v(w) = v \times w$. Demuestra:

   a) T_v es una tranformación lineal antisimétrica; es decir, $\langle T_v v_1, v_2 \rangle = -\langle v_1, T_v v_2 \rangle$ para todo v_1, v_2.

   b) Escribe la matriz de T_v en términos de las componentes de v, ambos con respecto a una base ortonormal positivamente orientada.

   c) $v \mapsto T_v$ define un isomorfismo lineal entre V y el espacio de las transformaciones anti-simétricas en V.

   d) $T_{v_1 \times v_2} = [T_{v_1}, T_{v_2}]$.

   Nota: Para matrices $n \times n$, $[A, B] := AB - BA$.

   e) Usa los incisos anteriores para dar una demostración de la identidad de Jacobi.

6. (Opcional) Sea $B : \mathbb{R} \to Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ una función diferenciable tal que $B(t)$ es ortogonal para todo $t \in \mathbb{R}$. Demuestra que: (a) $A(t) = \left(\frac{d}{dt}B(t)\right) B(t)^{-1}$ es antisimétrica para todo $t \in \mathbb{R}$. (b) Existe una única función $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\omega(t) \times v = A(t)v$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$. (c) Para todo $P \in \mathbb{R}^3$, la función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $p(t) = B(t)P$ satisface $\frac{d}{dt}p(t) = \omega(t) \times p(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. (d) Interpretar geométricamente (con un dibujo) el inciso anterior.

   Sugerencias: (a) Fija $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ y deriva ambos lados de $\langle B(t)v_1, B(t)v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ con respecto a t. (b) y (c): usa el problema 5 arriba. (d) $\omega(t)$ es el "vector de velocidad angular instantanea"del "moviemiento rigido"dado por B.

7. (Opcional) Sea V un espacio euclideano 3 dimensional con una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$. Sean $V_1 = span\{u_2, u_3\}$, $V_2 = span\{u_1, u_3\}$, $V_3 = span\{u_1, u_2\}$. Sean $v_1, v_2 \in V$ y $P \subset V$ el paralelogramo generado por v_1, v_2. Sea P_i la proyección ortogonal de P sobre V_i. Sea $A = Area(P)$, $A_i = Area(P_i)$. Demuestra que $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$.

   Sugerencia. Escoge una orientación en V y define $w = v_1 \times v_2$. Sea w_i la proyección ortogonal de w sobre $\mathbb{R}u_i = V_i^{\perp}$. Demuestra que $\|w_i\| = A_i$.