Calculo III, DEMAT-CIMAT, aug-dic 2011.

Examen parcial 2 - solucion de problema 2

8 nov 2011

Problema 2. Consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x + y.$$

Sea $P_0 = (2, 3)$. Encuentra los siguientes:

a) La derivada de f en P_0.

$\triangleright$ $df(P_0) = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy = (2x + y + 1)dx + (x + 2y + 1)dy|_{(2,3)} = 8dx + 9dy$. $\square$

b) El desarrollo de Taylor de orden n de f alrededor de P_0, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

$\triangleright$ Sea $\mathbf{v} = (h, k)$, entonces el desarrolo de Taylor de orden n de f en P_0 es de la forma $f(P_0 + \mathbf{v}) = T_n(\mathbf{v}) + R_n(\mathbf{v})$, donde T_n es un polinomio de grado $\leq n$ y $R_n(\mathbf{v}) = o(\|\mathbf{v}\|^n)$.

Ahora $f(P_0 + \mathbf{v}) = f(2 + h, 3 + k) = (2 + h)^2 + (3 + k)^2 + (2 + h)(3 + k) + (2 + h) + (3 + k) = 24 + 8h + 9k + h^2 + k^2 + hk$, así que $T_0 = 24$, $T_1 = 24 + 8h + 9k$ y $T_n = 24 + 8h + 9k + h^2 + k^2 + hk$ para $n = 2, 3, \ldots$. $\square$

c) Una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ para la recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por P_0.

$\triangleright$ Si $P = (x, y)$ está sobra la recta tangente en P_0 entonces $0 = df(P_0)(P - P_0) = (8dx + 9dy)(x - 2, y - 3) = 8(x - 2) + 9(y - 3) = 8x + 9y - 43$. $\square$

d) Un dibujo de la curva de nivel del inciso anterior.

$\triangleright$ La ecuación de la curva es $x^2 + y^2 + xy + x + y = 24$. El cambio de variable $x = (y_1 - x_1)/\sqrt{2}, y = (y_1 + x_1)/\sqrt{2}$ (el factor de $\sqrt{2}$ se introduce para que sea una rotación), transforma la ecuación a $x_1^2 + 3y_1^2 + 2\sqrt{2}y_1 = 48$. Completando cuadrádos, esto es $x_1^2 + 3(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{3})^2 = 146/3$. Cambiando a $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}$, obtenemos $(x_2/A)^2 + (y_2/B)^2 = 1$, con $A = \sqrt{146/3} \approx 7$, $B = \sqrt{146/9} \approx 4$.

Esta es una elipse con centro en $x_2 = y_2 = 0 \Rightarrow x = y = -1/3$, con semi-eje mayor A a lo largo del eje de x_2 y semi-eje menor B a lo largo del eje de y_2. El eje de x_2 (el eje mayor de la elipse) está dado por $y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = -\sqrt{2}/3 \Rightarrow y = -x - 2/3$, y el eje de y_2 (el eje menor de la elipse) está dado por $x_2 = 0 \Rightarrow y = x$. (Con esta información es fácil hacer el dibujo). $\square$

e) Una ecuación de la forma $ax + by + cz + d = 0$ para el plano tangente a la gráfica de f en $(2, 3, 24)$.

▷ La gráfica está dada por la ecuación $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, así que la tangente en $(2, 3, 4)$ está dada por $0 = dF(2, 3, 24)(x - 2, y - 3, z - 24) = (df(2, 3) - dz)(x - 2, y - 3, z - 24) = 8(x - 2) + 9(y - 3) - (z - 24) = 8x + 9y - z - 19$. □

f) Los puntos críticos de f, el hessiano de f en estos puntos, su tipo (positivo/negativo definido etc.) y decide cuál es el tipo del punto crítico (mínimo/máximo, local/global etc).

▷ Los puntos críticos P están dados por $df = 0 \Rightarrow f_x = f_y = 0 \Rightarrow 2x + y + 1 = 2y + x + 1 = 0 \Rightarrow x = y = -1/3$. Luego, $f_{xx} = f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 1$, por lo que el hessiano es $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Esta es una matriz positiva definida, ya que $\det H = 3 > 0$ y los elementos en el diagonal son positivos. Así que $(-1/3, -1/3)$ es un mínimo local (por lo menos). De hecho, es un mínimo global, ya que $f(x, y) = (x_2/A)^2 + (y_2/B)^2 + c$, para algun $c \in \mathbb{R}$ (ver la solución del inciso 4), lo cual tiene mínimo en $x_2 = y_2 = 0 \Rightarrow x = y = -1/3$. □

g) El mínimo y máximo de f restringida al conjunto $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$.

▷ Usando el método de multiplicadores Lagrange, en dichos puntos $df = \lambda d(x^2 + y^2)$, para algun $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (2x + y + 1, 2y + x + 1) = \lambda(2x, 2y) \Rightarrow (2x + y + 1)y = (2y + x + 1)x \Rightarrow y^2 + y = x^2 + x \Rightarrow (y + 1/2)^2 = (x + 1/2)^2 \Rightarrow y + 1/2 = \pm(x + 1/2) \Rightarrow y = x$, $y = -x - 1$. Intersectando estas dos rectas con $x^2 + y^2 = 1$, obetenemos 4 candidatos: $\pm(1, 1)/\sqrt{2}$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Evaluando f en estos 4 puntos concluyimos: máximo en $(1, 1)/\sqrt{2}$, mínimo en $(-1, 0), (0, -1)$. □