Calculo III, DEMAT-CIMAT, ago-dic 2011.

Examen parcial 1 - soluciones

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la función dada por $f(t) = (t^2, t^3)$.

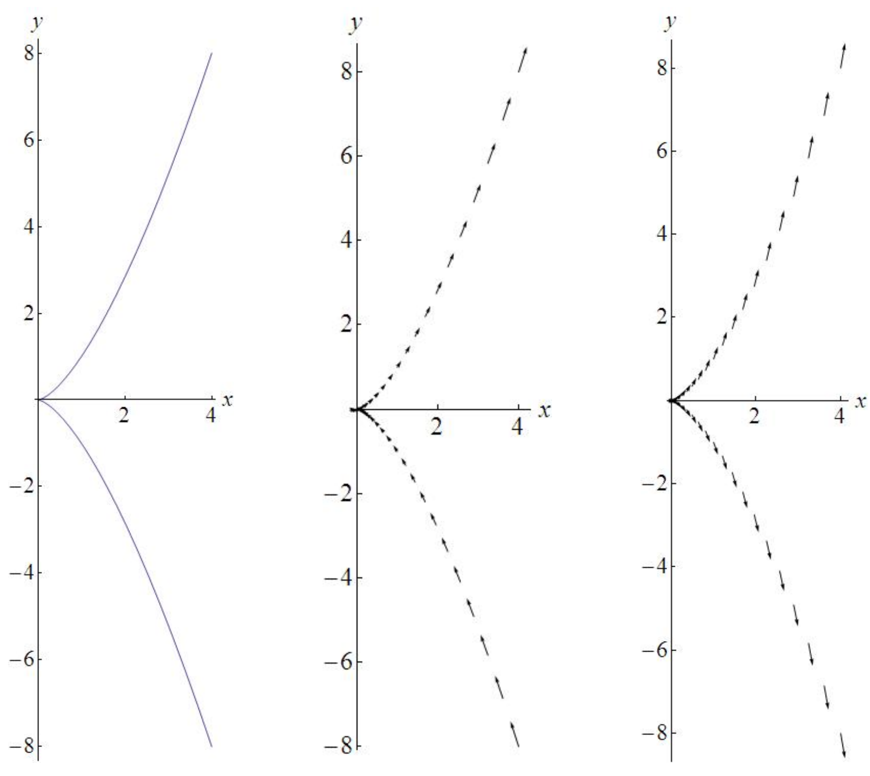
   a) Dibuja la imagen de f en $\mathbb{R}^2$.

   b) Dibuja $f'(t)$ sobre la imagen de f.

   Nota: "dibujar $f'(t)$"significa dibujar una flecha basada en $f(t)$ para varios valores de t (suficiente valores para tener idea de lo que sucede).

   c) Repetir el inciso anterior para $f''(t)$.

   ▷



a) *b*) *c*)

Nota: en b) y c), las flechas están dibujadas a 5 % de su tamaño real, para que no "estorben" una a la otra. □

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $Df(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Demuestra que f es constante.

   ▷ Demostraremos que $f(P) = f(0)$ para todo $P \in \mathbb{R}^2$. Dado un $P \in \mathbb{R}^2$, sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $g(t) = f(tP)$. Demostraremos que $g'(t) = 0$ para todo t, por lo que g es constante, y en particular $g(0) = g(1) \Longrightarrow f(0) = f(P)$.

   Una manera de demostrar que $g'(t) = 0$ es usar la regla de la cadena: g es la composición de $t \mapsto tP$ (lo cual es difreneciable por ser lineal) y f, por lo que g es diferenciable con $g'(t) = Df(tP)\frac{d}{dt}(tP) = 0$.

   Si no queremos usar la regla de la cadena (no fue incluida en el material del examen), podemos usar directamente la definición de diferenciabilidad: como f es diferenciable en tP, con $Df(tP) = 0$, $\lim_{\mathbf{v}\to 0}[f(tP + \mathbf{v}) - f(P)]/\|\mathbf{v}\| = 0$. Luego, $|[g(t + \Delta t) - g(t)]/\Delta t| = |[f(tP + \Delta tP) - f(tP)]/\Delta t| = \|P\||f(tP + \mathbf{v}) - f(tP)|/\|\mathbf{v}\|$, donde $\mathbf{v} = \Delta tP$, así que cuando $\Delta t \to 0 \Longrightarrow \mathbf{v} \to 0 \Longrightarrow |f(tP + \mathbf{v}) - f(P)|/\|\mathbf{v}\| \to 0 \Longrightarrow [g(t + \Delta t) - g(t)]/\Delta t \to 0 = g'(t)$. □

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$. Demuestra que

   a) f es diferenciable para todo $\mathbf{x} \neq 0$ y calcula la derivada de f para tal $\mathbf{x}$.

   ▷
   $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\|\mathbf{x}\|^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{x}\|^2\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x_i}\|\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^{-1}2x_i = \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|}.$$
   Estas funciones son contínuas en $\mathbf{x} \neq 0$, por lo que f es diferenciable en $\mathbf{x} \neq 0$ y la derivada esta dada por $Df(\mathbf{x})\mathbf{v} = \sum_i \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|}v_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle/\|\mathbf{x}\|$. □

   b) f no es diferenciable en $\mathbf{x} = 0$.

   ▷ Si f fuera diferenciable en 0 tendria derivadas parciales en 0. La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)$ es la derivada en $x_1 = 0$ de la función $x_1 \mapsto f(x_1, 0, \ldots, 0) = \sqrt{x_1^2} = |x_1|$. Pero esta función no es diferenciable en $x_1 = 0$. □

4. Cierto o Falso:

   a) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es contínua y $F \subset \mathbb{R}^2$ es cerrado entonces $f(F)$ es cerrado.

   ▷ Falso. Por ejemplo, el conjunto $F = \{(x, y)|xy = 1\}$ es cerrado, pero su imagen bajo $(x, y) \mapsto (x, 0)$ es el eje de x menos el origen, lo cual no es cerrado. □

   b) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ entonces $\lim_{\mathbf{v}\to 0}[f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})]/\|\mathbf{v}\|$ existe.

   ▷ Falso. Por ejemplo, para la función $f(x, y) = x$, $\mathbf{x} = (0, 0)$ y $\mathbf{v}_n = ((-1)^n/n, 0)$, $\mathbf{v}_n \to 0$ pero $[f(\mathbf{x} + \mathbf{v}_n) - f(\mathbf{x})]/\|\mathbf{v}_n\| = (-1)^n$ lo cual no converge. □

   c) Existe una función lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(x + h)(y + k) - L(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

$\triangleright$ Falso. Digamos para $x = y = 1$, el límite del numerador cuando $(h, k) \to (0, 0)$ es 1 y del denumerador es 0. $\square$