Examen parcial núm. 2 – soluciones

1. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita sobre el mismo campo K. Demuestra: $\dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(V)$.

   $\triangleright$ Sea $\{v_1, \ldots v_k\}$ una base de $Ker(T)$, $k = \dim Ker(T)$, y lo completamos a una base de V, $\{v_1, \ldots v_k, v_1', \ldots, v_l'\}$, $l = \dim V - \dim Ker(T)$. Sea $w_j = Tv_j'$, $j = 1, \ldots, l$. Demostraremos que $\{w_1, \ldots, w_l\}$ es una base de $Im(T)$, por lo que $\dim Im(T) = l = \dim V - \dim KerT$. Sea $Tv \in ImT$, $v \in V$. Entonces $v = \sum_i c_i v_i + \sum_j c_j' v_j'$ para unos escalares $c_1, \ldots, c_k, c_1', \ldots, c_l' \in K$. Entonces $Tv = T(\sum_i c_i v_i + \sum_j c_j' v_j') = \sum_i c_i(Tv_i) + \sum_j c_j'(Tv_j') = \sum_j c_j'(Tv_j') = \sum_j c_j' w_j$, por lo que $\{w_1, \ldots, w_l\}$ genera a ImT. Luego, si existen escalares $c_1', \ldots, c_l'$ tal que $\sum_j c_j' w_j = 0 \implies 0 = \sum_j c_j'(Tv_j') = T(\sum_j c_j' v_j') \implies \sum_j c_j' v_j' \in KerT \implies$ existen escalares $c_1, \ldots, c_k$ tal que $\sum_j c_j' v_j' = \sum_i c_i v_i \implies \sum_j c_j' v_j' - \sum_i c_i v_i = 0 \implies c_1 = \ldots = c_k = c_1' = \ldots = c_l' = 0 \implies \{w_1, \ldots, w_l\}$ es linealmente independiente. $\square$

2. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4, 9x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 12x_4)$. Encuentra bases para el kernel y la imagen de T.

   $\triangleright$ Aplicacamos eliminacion Gaussiana a los coeficientes del sistema $T\mathbf{v} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   De aquí, los variables x_3, x_4 son libres y detrminan los variables x_1, x_2 por las fórmulas $x_1 = x_3 + 2x_4$, $x_2 = -2x_3 - 3x_4$. Tomamos $x_1 = 1, x_2 = 0$ y obtenemos $v_1 = (1, -2, 1, 0)$, y $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ nos da $v_2 = (2, -3, 0, 1)$. Así que una base para $KerT$ está dada por $\{v_1, v_2\}$. Luego, los pivotes en la forma escalonada estan ubicado en la primera y segunda columna, por lo que una base para la imagen de T está dada por las primeras dos columnas de la matriz de T con respecto a la base canónica, es decir $(1, 5, 9)$ y $(2, 6, 10)$. $\square$

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T(x, y) = (x+y, x-y)$. Encuentra la matriz de T con respecto a la base $\{(1, 2), (3, 4)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

   $\triangleright$ Si la matriz buscada es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces, por definición de "matriz de una transformación lineal con respecto a una base",

$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},$$

   o en notacion matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -15 & -31 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}.$$

$\square$

4. Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}, B' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2\} \subset \mathbb{R}^2$, donde $\mathbf{v}_1 = (1, 2), \mathbf{v}_2 = (3, 4), \mathbf{v}'_1 = (5, 6)$ y $\mathbf{v}'_2 = (7, 8)$.

   a) Demuestra que B, B' son bases de $\mathbb{R}^2$.

   $\triangleright$ Basta ver que son linealmente indepnedientes (ya que $\dim\mathbb{R}^2 = 2$). Para esto basta notar que para cada par, ningun vector es un múltiplo del otro. Otra demostración: se calcula la determinante de la matriz de coordenadas de los vectores; para B nos da $1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$, para B' da $5 \cdot 8 - 6 \cdot 7 = -2 \neq 0$. $\square$

   b) Expresa las coordenadas de un vector en $\mathbb{R}^2$ con respecto a B en términos de sus coordenadas con respecto a B'.

   $\triangleright$ Sean a, b las coordenadas de un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ con respecto a B y a', b' sus coordenadas con respecto a B'. Entonces por definición de coordenadas,

$$\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = a'\mathbf{v}'_1 + b'\mathbf{v}_2,$$

$$\Longrightarrow \quad a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = a'\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} + b'\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad a = -a' - 2b', \qquad b = 2a' + 3b'. \quad \square$$

   c) Expresa las coordenadas de un vector en $\mathbb{R}^2$ con respecto a B' en términos de sus coordenadas con respecto a B.

$\triangleright$ Del inciso anterior,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad a' = 3a + 2b, \qquad b' = -2a - b. \quad \square$$