Formas cuadráticas (cont.)

Los ejercicios están marcados con $\to$. Los ejercicios marcados con $*$ son opcionales.

Parte II. Formas cuadráticas en n variables

Para generalizar los resultados anteriores de formas cuadráticas en 2 variables a formas cuadráticas con un número arbitrario de variables tenemos que introducir una notación matricial para formas cuadráticas. Empezamos con formas en dos variables.

Dada una forma $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, queremos encontrar una matriz $A \in Mat_2(\mathbb{R})$ tal que $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t A\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Aquí está una manera de hacerlo:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (x \quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\binom{x}{y}.$$

Aquí está otra manera de hacerlo:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (x \quad y)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\binom{x}{y}.$$

Aquí está otra:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (x \quad y)\begin{pmatrix} a & 0.86b \\ 0.14b & c \end{pmatrix}\binom{x}{y}.$$

¿Cuál manera escojemos?

Resulta que la segunda manera es la más útil, y la que vamos a usar.

$\to$ **18.** (i) Para la forma cuadrática $f(x,y) = xy$, encuentra toda las matrices $A \in Mat_2(\mathbb{R})$ tal que $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t A\mathbf{v}$ para todo vector columna $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. (ii) Demuestra: dada una forma cuadrática f en $\mathbb{R}^2$, existe una sola matriz simétrica $A \in Mat_2(\mathbb{R})$ tal que f está dada por la fórmula $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t A\mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ (vectores columna).

[Nota: "una sola"significa que si dos matrices simétricas $A, B \in Mat_2(\mathbb{R})$ satisfacen que $\mathbf{v}^t A\mathbf{v} = \mathbf{v}^t B\mathbf{v}$ para todo vector columna $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, entonces $A = B$.]

La moraleja del último ejercicio es que si insistimos que la matriz A en la igualdad $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t A\mathbf{v}$ sea *simétrica* entonces obtenemos una biyección entre formas cuadráticas y matrices simétricas.

Definición. *Dada una forma cuadrática $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ en $\mathbb{R}^2$, la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ se llama* **la matriz simétrica que representa** *a f. Conversamente, dada una matriz simétrica A, la forma cuadrática $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t A\mathbf{v}$ se llama* **la forma cuadrática asociada** *a la matriz simétrica A.*

$\to$ **19.** Encuentra las matrices simétricas que representan las formas cuadráticas $3x^2 + 4xy + 5y^2$, $x^2 + y^2$, x^2, 0, xy, $(x + y)^2$.

→ **20.** Demuestra que una forma cuadrática es diagonal si y solo si la matriz simétrica que le representa es una matriz diagonal.

<u>**Definición**</u>. *Una matriz simétrica* $A \in Mat_2(\mathbb{R})$ *se llama* **positiva-definida** *si la forma cuadrática asociada es positiva definida. Es decir,* A *es positiva definida si* $\mathbf{v}^t A\mathbf{v} > 0$ *para todo* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$*. De manera similar se define matriz simétrica* **negativa-definida, no-negativa** *y* **no-positiva**.

Nota: el adjetivo "positiva definida" se aplica solo a matrices simétricas, aunque la fórmula $\mathbf{v}^t A\mathbf{v} > 0$ tiene sentido para matrices no simétricas.

→ **21.** Demuestra que una matriz simétrica A es positiva definida si y solo si (i) uno de los elementos en su diagonal es positivo, (ii) $\det A > 0$. (Nota: la determinante de una matriz 2×2 es $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.)

Sugerencia: nota que la determinante de una matriz simétrica es la descriminante de la forma cuadrática asociada. Luega usa el problem 5 de la parte I de este tarea.

→ **22.** Sea A una matriz simétrica y f_A la forma cuadrática asociada; es decir, $f_A(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t A\mathbf{v}$ para todo vector columna $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Sea $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un cambio de variable lineal dado por una matriz invertible que denotamos tambien por L (usando un ligero abuso de notación; estamos identificamos entre la matriz L y la transformación lineal $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{v}' \mapsto L\mathbf{v}'$). Demuestra que $L^* f$ es la forma cuadrática asociada con la matriz $L^t AL$. Es decir, $L^*(f_A) = f_{L^t AL}$.

Corolario. *Sea* f_A *una forma cuadrática en* $\mathbb{R}^2$ *asociada a una matriz simétrica* $A \in Mat_2(\mathbb{R})$*. Entonces un cambio de variable lineal* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *diagonaliza a* f_A *ssi* $L^t AL$ *es una matriz diagonal.*

<u>**Definición**</u>. *Dos matrices simétricas* $A, B \in Mat_2(K)$ *son* **congruentes** *si sus formas cuadráticas asociadas son congruentes. Equivalentemente: existe una matriz* 2×2 *invertible* L *tal que* $B = L^t AL$*. Una matriz simétrica es* **diagonalizable** *si es congruente a una matriz diagonal.* **Diagonalizar** *una matriz simétrica* A *significa encontrar una matriz invertible* L *tal que* $L^t AL$ *es diagonal.*

Ahora intentamos a generalizar las definiciones y reultados anteriores a formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$, $n > 2$.

<u>**Definición**</u>. *Un* **monomio cuadrático** *en* $\mathbb{R}^n$ *es el producto de cualquer dos de los* n *variables* $x_1, \ldots, x_n$.

Por ejemplo, hay 6 mononios cuadráticos en los 3 variables x, y, z: son $x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz$.

→ **23.** ¿Cuántos monomios cuadráticos en n variables hay? (Respuesta: $n(n + 1)/2$).

<u>**Definición**</u>. *Una función* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una* **forma cuadrática** *si es una combinación lineal (con coeficientes reales) de monomios cuadráticos.*

Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = xy - yz$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$.

→ **24.** Demuestra que las siguientes 4 condiciones sobre una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son equivalente:

(i) Existen n^2 constantes $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le i, j \le n$, tal que $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i x_j$ para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Existe una matriz $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ tal que $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t A \mathbf{v}$ para todo vector columna $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Existe una matriz simétrica *$A \in Mat_n(\mathbb{R})$ tal que $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t A \mathbf{v}$ para todo vector columna $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.*

(iv) f es una forma cuadrática.

Algunos comentarios acerca de las diferencias entre las 4 definiciones de forma cuadrática: la condición (i) del último ejercicio es la definición que dimos en el curso. La definición (ii) es la misma que (i), solo que en notación matricial. El problema con esta definición, como hemos visto arriba en caso de $n = 2$ variables, es que la matriz de coeficientes A no está únicamente asociada a la forma. La definición (iii) arregla este problema porque al pedir que la A sea simétrica en la fórmula $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t A \mathbf{v}$ la A se vuelve única.

$\rightarrow$ **25.** Revisa con cuidado todas las definiciones y ejercicios anteriores de esta tarea (de 1 hasta 22) e intenta generalizar todo lo que puedes a $\mathbb{R}^n$. En particular, generaliza la biyección entre formas cuadráticas y matrices simétricas, las definiciones de cambio de variable en formas cuadráticas, diagonalización y congruencia de formas cuadráticas y matrices simétricas.

Algunos comentarios acerca del último ejercicio:

1. Todos los resultados que hemos visto acerca de formas cuadráticas en 2 variables se generalizan a n variables. Pero hay tres de los reultados que no se generalizan tan facilmente. El primero es el teorema de la diagonalización de formas cuadráticas ("toda forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es diagonalizable"). La demostración que dimos en 2 variables (el truco de completar cuadrádos) no se generaliza tan fácilmente a $\mathbb{R}^n$ (o por lo menos yo no veo como genralizarlo). En el curso no hemos demostrado rigorosamente este teorema sino "nos convencimos"que es cierto mediante un algoritmo de diagonalización de matrices simétricas basado en eliminación Gaussiana. Es posible dar una demostración rigurosa del teorema examinando con cuidado el algoritmo que hemos usado, pero no lo haremos. En la segunda parte del curso (álgebra lineal II, del próximo semestre) damos una demostración rigurosa del teorema usando unas ideas diferentes. De hecho, vamos a demostrar una versión aun más fuerte e informativa del teorema, demostrando que toda forma cuadrática es diagonalizable mediante un cambio de variable *ortogonal* (un cambio de variable lineal en $\mathbb{R}^n$ que preserva distancias).

2. El segundo resultado acerca de formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ que no es tan fácil de generalizar a $\mathbb{R}^n$ es el problema 5 (un criterio para una forma cuadrática para ser positiva degfinida en términos de sus coeficientes). La generalización es la siguiente: dada una forma cuadrática f en $\mathbb{R}^n$ representada por una matriz simétrica $A \in Mat_n(\mathbb{R})$, consideramos la sucesión de matrices simétricas $A_1, A_2, \ldots, A_n = A$, donde $A_k \in Mat_k(\mathbb{R})$ es la submatriz de A formada por sus entradas a_{ij} tal que $1 \le i, j \le k$. Entonces f es positiva definida si y solo si $det(A_k) > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Este resultado tambien lo demostraremos en el próximo semestre (despues de dar la definición de la detrminante de una matriz $n \times n$).

3. El tercer resultado es el problema 15. La parte (i) se generaliza facilmente (suponiendo que toda forma cuadrática es diagonalizable).

→ **26.** Suponiendo que toda forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es diagonalizable, demuestra que toda forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es congruente a una forma cuadrática de la forma $\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{r} x_i^2$, con $0 \leq k \leq r \leq n$.

La parte del problema 15 que no se generaliza tan facilmente es 14(ii). Tenemos el siguiente teorema (que tampoco vamos a demostrar hasta el próximo semestre).

Teorema. *("La ley de inercia de Sylvester") En cualquer diagonalización de una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$, el número de coeficientes positivos n_+ y negativos n_- es lo mismo.*

En consecuencia, podemos asignarle este par de números $n_\pm$ a una forma cuadrática sin ambigüedad.

Definición. *La* **signatura** *de una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es la diferencia $sign(f) = n_+ - n_-$ entre el número de términos positivos y el número de términos negativos en cualquer diagonalización de la forma. El* **rango** *de la forma es $rang(f) = n_+ + n_-$.*

→ **27.** Dos formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$ son congruentes si y solo tienen el mismo rango y signatura.

Por ejemplo, una forma positiva definida en $\mathbb{R}^n$ es una forma con $sign(f) = rang(f) = n$. El criterio para ser forma positiva definida del problema 5 se puede generalizar a n variables pero no lo vamos hacer aqui (requiere generalizar la noción de descriminante). En lugar de esto tenemos, según la Ley de inercia, el siguiente citerio: una forma cuadrática es positiva definida ssi cualquer diagonalización de la forma es positiva de definida; es decir, es de la forma $\sum_i c_i x_i^2$, con $c_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Así que si queremos saber si una forma es positiva definida, la diagonalizamos y examinamos la forma diagonal que obtenemos.

→ **28.** Encuentra el rango y signatura de cada una de los ejemplos de formas cuadráticas que aprecieron en este tarea.

→ **29.** Encuentra el número de clases de congruencia de formas cuadráticas en (i) $\mathbb{R}^n$, (ii) $\mathbb{C}^n$.

Respuesta a (ii): $n+1$, dadas por $0, x_1^2, x_1^2 + x_2^2, \ldots, x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Así que formas cuadráticas complejas no tienen signatura, solo rango.

→ **30.** Diagonaliza la forma cuadrática $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$ en $\mathbb{R}^n$ y encuentra su rango y signatura.

Respuesta: rango$= n$ si n es par, $n-1$ si n es impar; signatura$= 0$.

Sugerencia: haz algunos de los primeros casos, digamos $n = 2, 3, 4, 5$.

La demostración de la ley de inercia tambien la posponemos a la segunda parte del curso (próximo semestre).