Formas cuadráticas

Los ejercicios están marcados con $\to$. Los ejercicios marcados con $*$ son opcionales.

Parte I. Formas cuadráticas en 2 variables

<u>**Definición**</u>. **Una forma cuadrática en** $\mathbb{R}^2$ *es una función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, *donde* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Los números* a, b, c *se llaman* **los coeficientes** *de la forma. La forma es* **diagonal** *si el coeficiente de* xy *(la* b*) se anula. La forma es* **positiva definida** *si* $f(\mathbf{v}) > 0$ *para todos* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *en* $\mathbb{R}^2$ *(nota que* $f(\mathbf{0}) = 0$ *para cualquer forma cuadrática). De manera similar, se define* **negativa definida** *(*$f(\mathbf{v}) < 0$ *para todos* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$*),* **no-negativa** *(*$f(\mathbf{v}) \geq 0$ *para todos* $\mathbf{v}$*) y* **no-positiva** $f(\mathbf{v}) \leq 0$ *para todos* $\mathbf{v}$*).*

Por ejemplo, las siguientes son formas cuadráticas diagonales en $\mathbb{R}^2$: $x^2 + y^2$, x^2, 0, $x^2 - 2y^2$. La siguientes son formas cuadráticas que no son diagonales: xy, $(x + y)^2$. Las siguientes son formas cuadráticas positivas definidas: $x^2 + y^2$, $x^2 + 2xy + 2y^2$ (la última por ser igual a $(x + y)^2 + y^2$.) Las siguientes no son positivas definidas: xy, x^2. Una forma positiva definida es no-negativa pero el converso no es cierto; por ejemplo: $x^2, (x + y)^2$.

Ahora una advertencia: en la definición arriba se definen “los” coeficientes de una forma cuadrática. Pero esta definición supone, implicitamente, que los coeficientes están bien definidos. Es decir, que si una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada digamos por $f(x, y) = 3x^2+4xy+5y^2$, así que es una forma cuadrática según la definición de forma cuadrática, entonces es la *única* manera de darla de esta manera. En otras palabras, que si $3x^2 + 4xy + 5y^2 = ax^2 + bxy + cy^2$, para algunos constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ y todos $x, y \in \mathbb{R}$, entonces necesariamente $a = 3, b = 4, c = 5$. Si esto es cierto, entonces podemos decir, sin ambigüedad, que *los* coeficientes de la forma son $3, 4, 5$.

$\to$ **1.** Demuestra: (i) si $a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{R}$ tal que $ax^2 + bxy + cy^2 = a'x^2 + b'xy + c'y^2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $a = a', b = b', c = c'$. (ii) El conjunto $\{x^2, xy, y^2\}$ forma una base del espacio de las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ (un subespacio del espacio de todas las funciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).

Sugerencia para (i): sustituyendo por ejemplo $x = 1$, $y = 0$ obtenemos $a = a'$.

Típicamente es fácil ver si una función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática o no. Pero a veces no tanto. Por ejemplo, $f(x, y) = (x+y)^2$ es una forma cuadrática, pero hay que hacer cuentas (un poco): $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, así que sí es una forma cuadrática, con coeficientes $a = c = 1, b = 2$.

$\to$ **2.** Para cada una de las siguientes funciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ decide si es una forma cuadrática o no. En caso que sí, encuentra sus coeficientes a, b, c y decide si es diagonal y/o positiva definida.

(a) $f(x, y) = (x + 1)^2$ (b) $f(s, t) = (s - 2t)^2$ (c) $F(X, Y) = (X - 1)^2 + (X + 1)^2 - 2$ (d) $B(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{100} (\alpha - k\beta)^2$.

$\to$ **3.** $*$ Demuestra que una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática si y solo si f cumple con las siguientes dos condiciones: (i) $f(c\mathbf{v}) = c^2 f(\mathbf{v})$ para todo $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$; (ii) la función $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w})$ es una **forma bilineal**; es decir: $B(c\mathbf{v}+c'\mathbf{v},\mathbf{w}) = cB(\mathbf{v},\mathbf{w})+c'B(\mathbf{v}',\mathbf{w})$ y $B(\mathbf{v},c\mathbf{w}+c'\mathbf{w}') = cB(\mathbf{v},\mathbf{w})+c'B(\mathbf{v},\mathbf{w}')$, para todo $\mathbf{v},\mathbf{v}',\mathbf{w},\mathbf{w}' \in \mathbb{R}^2$, $c,c' \in \mathbb{R}$.

Dada una forma cuadrática no es tan fácil saber si es positiva definida. Por ejemplo, $x^2 + 8xy + 10y^2$ no es positiva definida (evalua digamos en $(2,-1)$), mientras que $x^2 - 6xy + 10y^2$ sí lo es (¿puedes demostrarlo? si no, espera un poco). Hay un caso en donde es muy fácil ver si una forma es positiva definida (o casi cualquer otra propiedad). Es el caso que la forma es diagonal.

$\to$ **4.** (i) Demuestra que si una forma $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es positiva definida entonces $a,c > 0$. (ii) Demuestra que el converso, $a,c > 0 \implies$ positiva definida, es cierto si f es una forma *diagonal* ($b = 0$).

Para una forma no diagonal, como hemos visto, es más complicado saber si es positiva definida, por lo que introducimos la siguiente definición.

Definición. Dada una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, se define su **discriminante** por la fórmula $D(f) = ac - b^2/4$.

$\to$ **5.** Demuestra que una forma cuadrática $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es positiva definida si y solo si cumple las siguientes dos condiciones: (i) $a,c > 0$, (ii) $D(f) > 0$. (De hecho, en (i), basta con que $a > 0$ ó $c > 0$).

Sugerencia: Demuestra primero que un polinomio cuadrático ax^2+bx+c es positivo ($p(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$) si y solo si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$. Aplica ahora este criterio al polinomio cuadrático $p(x) = f(x,1)$.

Ahora vamos a introducir una noción de equivalencia (o "congruencia") de formas cuadráticas.

Definición. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una forma cuadrática. Un* **cambio de variable lineal** *en* f *es la composición* $g = f \circ L$*, donde* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *es una transformación lineal invertible; es decir,* $g(x',y') = f(ax' + by', cx' + dy')$*, donde* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *son tales que la matriz* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *es una matriz invertible (esto es equivalente a que* $ad - bc \neq 0$*).*

Notación: *Denotamos por* $L^*(f) := f \circ L$ *a la forma cuadrática que se obtiene de una forma cuadrática* f *al transofrmarla por un cambio de variables lineal* L*.*

$\to$ **6.** Demuestra que un cambio de variable lineal transforma una forma cuadrática a forma cuadrática.

$\to$ **7.** Demuestra: (i) L^* es una transformación lineal en el espacio de las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$; es decir: $L^*(c_1f_1+c_2f_2) = c_1L^*(f_1)+c_2L^*(f_2)$ para todas formas cuadráticas f_1, f_2 y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. (ii) $(L_1 \circ L_2)^* = L_2^* \circ L_1^*$. (iii) Para $L = id$ (la identidad en $\mathbb{R}^2$), $id^*(f) = f$ para toda f, así que id^* es la identidad en el espacio de las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$. (iv) L^* es invertible con $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$.

$\to$ **8.** Sea L el cambio variable lineal en $\mathbb{R}^2$ dado por $L(x,y) = (ax+by, cx+dy)$. Calcula la matriz de L^* con respecto a $B = \{x^2, xy, z^2\}$ (una base del espacio de las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$).

Definición. *Dos formas cuadráticas* f,g *en* $\mathbb{R}^2$ *son* **congruentes**, $f \sim g$*, si existe un cambio de variable lineal* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $g = L^*(f)$*. Una forma cuadrática* f *es* **diagonalizable** *si* *es congruente a una forma cuadrática diagonal. La* **diagonalización** *de una forma cuadrática consiste en encontrar un cambio de variable lineal que convierte la forma a una forma diagonal.*

Por ejemplo, el cambio de variable $x = X + Y, y = X - Y$, diagonaliza la forma cuadrática xy, convertiendola en la forma cuadrática $X^2 - Y^2$, por lo que las formas cuadráticas xy, $x^2 - y^2$ son congruentes. Otro ejemplo: la forma cuadrática $(x + y)^2$ se diagonaliza mediante el cambio de variable $X = x + y, Y = y$.

Nota: a veces, como en este último ejemplo, es más natural dar una fórmula para la inversa de la L.

Otra nota: el cambio de los nombres de los variables, de x, y a X, Y o otros nombres no es esencial. Podemos llamar a los variables de una función como queremos y en particular dar a los variables en la fórmula para g los mismo nombres que los variables en la fórmula para f. Así podemos escribir en el último ejemplo $g(x, y) = f(x - y, x + y) = x^2 - y^2$. Pero la experiencia muestra que sí es una buena idea cambiar los nombres de los variables al hacer un "cambio de variable"(pre-composición con una biyección). Por ejemplo, en lugar de hablar del cambio de variable $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $L(x, y) = (x - y, x + y)$ y luego calcular $f \circ L$ para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$, decimos simpelmente que el cambio de variables (o la "sustitución") $x = X + Y, y = X - Y$ transforma la forma xy a la forma (diagonal) $(X + Y)(X - Y) = X^2 - Y^2$.

→ **9.** Demuestra que congruencia entre formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica, transitiva).

→ **10.** (i) Encuentra todos los cambios variables lineales que no cambian la forma cuadrática $x^2 + y^2$. Es decir, los cambios de variable $x = aX + bY, y = cX + dY$, con $ad - bc \neq 0$, tales que $x^2 + y^2 = (aX + bY)^2 + (cX + dY)^2 = X^2 + Y^2$. (Respuesta: $x = \pm aX - bY$, $y = \pm bX + aY$, donde $a^2 + b^2 = 1$.) (ii) Interpreta estos cambios de variables geométricamente. (Respuesta: son rotaciones (signo +) o reflexiones (signo -) en $\mathbb{R}^2$). (iii) Repite lo anterior para la forma $x^2 - y^2$.

→ **11.** Encuentra todos los cambios de variables lineales $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cambian la forma cuadrática $x^2 + y^2$ a la forma cuadrática $x^2 + 2y^2$. (Sugerencia: sea L_0 un tal cambio. Si L_1 es cualquer otro tal cambio, entonces $L := L_0^{-1} \circ L_1$ deja fija la forma $x^2 + y^2$.)

→ **12.** Encuentra una fórmula que expresa a la discriminante $D(L^*(f))$ en términos de $D(f)$ y la matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de la L.

(Respuesta: $D(L^*f) = D(f)[\det(L)]^2$, donde $\det(L) = ad - bc$.)

→ **13.** Demuestra que cada una de las siguientes propiedades de una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ es *invariante* bajo congruencia; es decir, si dos formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ son congruentes y una de ella tiene la propiedad entonces la segunda tambien:

(i) Positiva definida, negativa definida, no-negativa y no positiva.

(ii) No degenerada: $D(f) \neq 0$.

(iii) El signo de la discriminante: si $f \sim g$ entonces $D(f) > 0$ ssi $D(g) > 0$, $D(f) < 0$ ssi $D(g) < 0$.

Teorema. *Toda forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ (o en K^2, para cualquer campo K de característica $\neq 2$) es diagonalizable.*

$\triangleright$ Sea $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ la forma cuadrática. Si $a = c = 0$ entonces el cambio de variable $x = X+Y$, $y = X-Y$ diagonaliza la forma. Si $a \neq 0$ usamos un famoso truco llamado "completar los cuadrados":

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a\left(x^2 + 2x\frac{by}{2a}\right) + cy^2 = a\left(x + \frac{by}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)y^2,$$

así que el cambio de variable $(x,y) = L(X,Y)$ tal que $X = x + by/2a$, $Y = y$ diagonaliza la forma. En caso que $a = 0, b \neq 0$ se puede hacer primero el cambio $x = Y, y = X$ y luego proceder como antes. $\square$

$\rightarrow$ **14.** Diagonaliza las siguientes formas en $\mathbb{R}^2$: $3x^2 + 2xy + y^2$, $3x^2 + 2xy$, $3x^2$.

$\rightarrow$ **15.** Sea $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$. Demuestra:

(i) f es congruente a una de las 6 formas $\pm(x^2 + y^2), xy, \pm x^2, 0$.

(ii) f es congruente a *solo una* de estas 6 formas. En otras palabras, existen exactamente 6 clases de congruencia de formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$, representadas por estas 6 formas.

(iii) Encuentra un criterio en términos de los coeficientes a, b, c para poder decidir a cual de las 6 formas f es congruente.

(iv) Usa el inciso anterior para visualizar en el espacio de las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ (un espacio vectorial real 3 dimensional con coordenadas a, b, c) las 6 regiones que corresponden a las 6 clases de congruencia de formas.

Sugerencia para (i). Despues de diagonalizar la forma, cambias cada variable por un factor, $X = \alpha X'$, $Y = \beta Y'$, y posiblemente intercambias los variables.

Sugerencia para (ii). Como congruencia es una relación de equivalencia, basta demostrar que ningun par de estas 6 formas es congruentes entre sí. Para esto, usa propiedades de formas cuadráticas invariantes bajo congruencia. Por ejemplo, x^2+y^2 no es congruente a ninguna de las otras 5 formas porque es la única forma entre las 6 que es positiva definida y "positiva-definida" es una propiedad invariante bajo congruencia.

Respuesta de (iii): sea $D(f) = ac - b^2/4$ (la discriminante de f). Entonces la clase de $x^2 + y^2$ (positivas definidas) se caracteriza por $a > 0, D(f) > 0$; $-(x^2 + y^2)$ por $a < 0, D(f) > 0$; xy por $D(f) < 0$; x^2 por $D(f) = 0$ con $a > 0$ o $b > 0$; $-x^2$ por $D(f) = 0$ con $a < 0$ o $b < 0$; 0 por $a = b = c = 0$.

Sugerencia para (iv). La expresión $D(f) = ac - b^2/4$ (una forma cuadrática en 3 variables!) se diagonaliza mediante $a = A + C, b = 2B, c = A - C$. Así que la ecuación $D = 0$ nos da un *cono* $A^2 = B^2 + C^2$ (de hecho dos conos pegados en sus vértices) cuyo interior es $D > 0$ y su exterior $D < 0$.

$\rightarrow$ **16.** * (i) Encuentra el número clases de congruencia de formas cuadráticas en K^2 para $K = \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$. (ii) Demuestra que hay una infinidad de clases de congruencia de formas cuadráticas en $\mathbb{Q}^2$. (iii) Mismo para $\mathbb{Z}^2$.

Nota: para $K = \mathbb{Z}$ (no es un campo pero el problema tiene sentido) el problema de describir las clases de congruencia de formas cuadráticas en $\mathbb{Z}^2$ es uno de los problemas más famosos y profundos de la teoría de números (y posiblemente toda la matemáticas). Para tener idea de la profundidad y belleza de este tema les recomendo mirar el librito "The Sensual (Quadratic) Form"por John H. Conway (unos de los mejores matemáticos de nuestro tiempo.)

$\to$ **17.** * Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función lineal; es decir, $f(c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}') = cf(\mathbf{v}) + c'f(\mathbf{v}')$ para todo $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{R}^2$. (i) Demuestra que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = ax + by$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (ii) Demuestra que si $f \neq 0$ entonces existe un cambio de variable lineal L que transforma f a la forma $g(x, y) = x$.

Parte II. Formas cuadráticas en n variables

[En construcción]