Examen Final

27 mayo 2011

Sea V el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con las operaciones $V \times V \to V$ y $\mathbb{R} \times V \to V$ dadas por $(f, g) \mapsto f + g$ y $(c, f) \mapsto cf$ (resp.), donde $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y $(cf)(x) = cf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

1. Escribe una lista de los axiomas que V, equipado con estas dos operaciones, debe de satisfacer para poder ser considerado como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

   (Nota: no tienes que demostrar que V satiface estas axiomas).

2. Escoje dos de los axiomas del inciso anterior y demuestra que V (equipado con las dos operaciones definidas arriba) los satiface.

   Nota: para el resto de los problemas suponemos, sin demostración, que V satisface a *todos* los axiomas de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

3. Sea $C \subset V$ un subconjunto (no necesariamente finito). Define: C es linealmente independiente.

4. Encuentra un subconjunto infinito de V que es linealmente indpendiente.

   Sugerencia: sea $C = \{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$, donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definido por $f_n(x) = 1$ si $x \in [n, n + 1)$ y $f(x) = 0$ si $x \notin [n, n + 1)$.

5. Usa el inciso anterior para demostrar que V no es de dimensión finita.

6. Define: $W \subset V$ es un subespacio vectorial.

7. Sea $W \subset V$ el conjunto de todos los polinomios de grado ≤ 2. Es decir, W es el conjunto de todos los elementos $f \in V$ tal que $f(x) = a + bx + cx^2$ para unos $a, b, c \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que W es un subespacio vectorial de V.

8. Define: $B \subset W$ es una base de W.

   Nota: en el curso hemos aprendido varias definiciones equivalentes de "base". Escoge la definición que te conviene para el siguiente inciso.

9. Para $n = 1, 2, \ldots$, sea $f_n \in V$ la función dada por $f_n(x) = x^n$. Ademas definimos $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que $B = \{f_0, f_1, f_2\}$ es una base de W.

   Nota: usa en esta demostración tu definición de "base"del inciso anterior.

10. Define: $T : W \to W$ es una transformación lineal.

11. Sea $T : W \to W$ dada por $(Tf)(x) = f(x+1)$. Demuestra que T está bien definida (es decir, $Tf \in W$ para todo $f \in W$) y que es una transformación lineal.

12. Encuentra a $[T]_B$ (la matriz de T con respecto a la base B del inciso 9).

13. Encuentra la inversa de $[T]_B$.

14. Sea $S : W \to W$ dada por $(Sf)(x) = f(x-1)$. Demuestra que $S = T^{-1}$.

15. Encuentra a $[S]_B$.

16. Demuestra que todo subconjunto linealmente independiente de W con 3 elementos es una base de W.

17. Sea $B' = \{g_0, g_1, g_2\} \subset W$ dado por $g_0 = f_0 + f_1$, $g_1 = f_1 + f_2$, $g_2 = f_2 + f_0$. Demuestra que B' es linealmente independiente (por lo que es una base de W, segun el inciso anterior.

18. Encuentra a $[T]_{B'}$ (la matriz de T con respecto a B').

19. Sea $f \in W$ dada por $f(x) = 1 + x + x^2$. Encuentra a $[f]_B$ y $[f]_{B'}$ (las coordenadas de f con respecto a las bases B y B', respectivamente).

20. Sea $f \in W$ y sean $\mathbf{v} = [f]_B, \mathbf{v}' = [f]_{B'} \in \mathbb{R}^3$ (vectores columna). Encuentra matrices $P, Q \in Mat_3(\mathbb{R})$ tal que $\mathbf{v}' = P\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} = Q\mathbf{v}'$.

    Sugerencia: verifica que las matrices que obtienes funcionan con los vectores $\mathbf{v} = [f]_B$ y $\mathbf{v}' = [f]_{B'}$ del inciso anterior.

21. Sea $B^* = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$ la base dual a B. Da una fórmula explicita para cada α_i, $i = 0, 1, 2$. (Por ejemplo, si $f(x) = a + bx + cx^2$, $\alpha_0(f) = a$.)

22. Repite el inciso anterior para B'^* (la base dual a B').

23. Sea $\alpha : W \to \mathbb{R}$ dada por $\alpha(f) = \int_0^1 f(x)dx$. Demuestra que $\alpha \in W^*$ y encuentra $[\alpha]_{B^*}$ y $[\alpha]_{B'^*}$ (las coordenadas de α con respecto a B^* y B'^*, respectivamente).

24. Sea $\alpha \in W^*$. Sean $p = [\alpha]_{B^*}$ y $p' = [f]_{B'^*}$ (vectores *reglon* en $\mathbb{R}^3$). Encuentra una matriz $U \in Mat_3(\mathbb{R})$ tal que $p' = pU$.

25. Sea B una base de W (no necesariamente la que hemos considerado aquí) y B^* la base dual. Sean $f \in W$ y $\alpha \in W^*$. Sean $\mathbf{v} = [f]_B$ (vector columna) y $p = [\alpha]_{B^*}$ (vector reglon). Demuestra: $\alpha(f) = p\mathbf{v}$ (multiplicación de vector reglon por vector columna).