# Notas núm. 2

7 dic, 2010

## Flujos, campos vectoriales y sus corchetes de Lie

**Definición**. Un **flujo** en una variedad $M$, o un **grupo de difeomorfismos de un parámetro**, es una una acción suave de $(\mathbb{R}, +)$ en $M$.

O sea, se define una función suave $\psi : \mathbb{R} \times M \to M$, tal que para cada $t \in \mathbb{R}$, $\psi_t := \psi(t, \cdot)$ es un difeomorfismo, $\psi_{t+s} = \psi_t \circ \psi_s$ y $\psi_0 = id_M$.

**Definición**. Un **flujo local**, o un **grupo local de difeomorfismos de un parámetro**, de una variedad $M$, es una función $\psi_t(x)$ definida en una vecindad de $\{0\} \times M \subset \mathbb{R} \times M$ tal que $\psi_0 = id_M$ y $\psi_{t+s} = \psi_t \circ \psi_s$ (cuando está definido).

**Definición**. Dado un flujo (local o global) $\psi_t$ en una variedad, el **generador infinitesimal del flujo** es el campo vectorial en $M$ dado por $v(x) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\psi_t(x)$.

**Definición**. Una **curva integral** de un campo vectorial $v$ en una variedad $M$ es una curva suave $\gamma : (a, b) \to M$ tal que $\dot{\gamma}(t) = v(\gamma(t))$ para todo $t \in (a, b)$.

→**2.1.** Si $\gamma(t)$ es una curva integral entonces $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(t - t_0)$ tambien lo es.

**Teorema**. **(Existencia y unicidad de soluciones de EDO)**.

Versión I. Si $v$ es un campo vectorial en una variedad $M$ entonces para todo $x \in M$ existe una curva integral $\gamma : (a, b) \to M$ tal que $a < 0 < b$ y $\gamma(0) = x$. Cualesquera dos tales curvas coniciden en una vecindad de $t = 0$.

Versión II. Dado un campo vectorial $v$ en una variedad $M$ existe un flujo local en $M$ cuyo generador infinitesimal es $M$. Cualquer dos tales flujos coinciden en una vecindad de $\{0\} \times M \subset \mathbb{R} \times M$.

→**2.2.** Demuestra que I $\Longrightarrow$ II.

→**2.3.** Encuentra las curvas integrales y los flujos asociados a los siguientes campos vectoriales en $\mathbb{R}$: $\frac{d}{dx}$, $x\frac{d}{dx}$, $x^2\frac{d}{dx}$. (Ojo: uno de los flujos es local, los otros dos son globales).

→**2.4.** El flujo asociado a un campo vectorial lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal, y está dado por $\psi_t = e^{tA}$.

**Definición**. Un campo vectorial $v$ en una variedad $M$ es **invariante** bajo un difeomorfismo $\psi : M \to M$ si $d\psi(x)v(x) = v(\psi(x))$ para todo $x \in M$.

→**2.5.** Un campo vectorial es invariante bajo un difeomorfismo ssi el flujo del campo conmuta con el difeomorfismo.

→**2.6.** Si un campo vectorial $v$ es invariante bajo un difeomorfismo $\psi$ entonces $\psi$ manda curvas integrales de $v$ a curvas integrales (si $\gamma$ es una curva integral entonces $\phi\circ\gamma$ es una curva integral también).

→**2.7.** Encuentra los difeomorfismos lineales de $\mathbb{R}^n$ que dejan invariante al campo $v(x) = \|x\|^\alpha \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. (Ojo: la respuesta puede depnder de $\alpha$.)

**Definición**. Sea $M$ una variedad y sea $C^\infty(M)$ el conjunto de las funciones (reales) diferenciables en $M$. Una **derivación** de $C^\infty(M)$ es una transformación lineal (sobre $\mathbb{R}$) $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ tal que $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$ (la regla de Leibnitz).

→**2.8.** El operador $a\frac{d}{dx} : f \mapsto a\frac{df}{dx}$, donde $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, es una derivación de $C^\infty(\mathbb{R})$. Toda derivación de $C^\infty(\mathbb{R})$ es de esta forma.

→**2.9.** Dado un campo vectorial $v$ en una variedad $M$, el operador $L_v : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ dado por $L_v(f)(x) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0} f(\gamma(t))$, donde $\gamma$ es una curva integral de $v$ tal que $\gamma(0) = x$, es una derivación.

→**2.10.** Dada una derivación $D$ de $C^\infty(M)$ existe un único campo vectorial $v$ tal que $D = L_v$.

→**2.11.** Dadas dos derivaciones $D, D'$ en $C^\infty(M)$ , $[D, D'] := D \circ D' - D' \circ D$ es una derivación.

**Definición**. Dados dos campos vectoriales $v, v'$ en una variedad, el campo vectorial $w$ tal que $L_w = [L_v, L_{v'}]$ se llama el **corchete de Lie** (o "conmutador") de $v, v'$ y se denota por $[v, v']$.

→**2.12.** El conjunto de campos vectoriales en $\mathbb{R}$ de la forma $v = (a + bx + cx^2)\frac{d}{dx}$, $a, b, c, \in \mathbb{R}$, es cerrado bajo el corchete de Lie.

→**2.13.** El corchete de Lie es bilineal, antisimétrico y satisface $[[u, v], w]+[[v, w], u]+[[w, u], v] = 0$ (la identidad de Jacobi).

→**2.14.** Si $X, Y$ son campos vectoriales en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, considerados como funciones $U \to \mathbb{R}^n$, entonces $[X, Y] = (DY)X - (DX)Y$.

→**2.15.** Dos campos vectoriales conmutan, $[v, w] = 0$, ssi sus flujos conmutan, $\psi^v_t \circ \psi^w_s = \psi^w_s \circ \psi^v_t$.

## El Álgebra de Lie de un grupo de Lie

**Definición**. Un **subgrupo de un parámetro** de un grupo de Lie es un homomorfismo suave $\phi : \mathbb{R} \to G$.

→**2.16.** Encuentra los subgrupos de un parámetro de $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

→**2.17.** Si $A$ es una matriz real $n \times n$ entonces $e^{tA} := \sum_i t^n A^n/n!$ define un subgrupo de un parámetro de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

**Definición**. Un **campo vectorial invariante por la izquierda** en un grupo de Lie $G$ es un campo vectorial invariante bajo todas las translaciones por la izquierda $L_g : x \mapsto gx$, $g \in G$.

→**2.18.** $\frac{d}{dx}$ es un campo invariante por la izquierda en $(\mathbb{R}, +)$. $x\frac{d}{dx}$ es un campo invariante por la izquierda en $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

→**2.19.** Si $A$ es una matriz real $n \times n$ entonces $X(g) = gA$ es un campo vectorial invariante por la izquierda en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. (Ojo: estamos usando la identificación de $T_g\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$).

→**2.20.** Si $X, Y$ son campos vectoriales invariantes por la izquierda en un grupo de Lie entonces $[X, Y]$ también es un campo invariante por la izquierda.

→**2.21.** Si $X, Y$ son dos campos vectoriales invariantes por la izquierda sobre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ cuyos valores en $I$ son las matrices $A, B$ (resp.), entonces el valor de $[X, Y]$ en $I$ es $AB - BA$ (conmutador de matrices).

→**2.22.** Dado un vector tangente $X$ en el espacio tangente a un punto $p$ de un grupo de Lie $G$, existe un único campo vectorial en $G$ invariante por la izquierda cuyo valor en $p$ es $X$.

→**2.23.** Encuentra el flujo asociado al campo vectorial invariante por la izquierda en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ cuyo valor en $I$ es $A \in Mat_n(\mathbb{R})$.

→**2.24.** Para un campo invariante por la izquierda en un grupo de Lie, el flujo asociado es un flujo global, i.e. $\phi_t(x)$ está definido para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times G$.

<u>**Teorema**</u>. Correspondencia 1-1

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subgrupos de} \\ \text{1 parametro} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{campos invariantes} \\ \text{por la izquierda} \end{array} \right\} \longleftrightarrow T_eG.$$

La correspondencia está dada por $\phi \mapsto \dot{\phi}(0)$, $X \mapsto X(e)$. El punto esencial de la demostración es tomar un campo vectorial invariante por la izquierda, tomar la curva integral $\phi(t)$ de este campo tal que $\phi(0) = e$ y demostrar que $\phi$ es un subgrupo de 1 parámetro.

<u>**Definición**</u>. La **álgebra de Lie** de $G$ es el espacio tangente $T_eG$ equipado con el corchete inducido por la identificación con los campos invariantes por la izquierda. O sea, el corchete de Lie de dos vectores $v, w \in T_eG$ se obtiene al extender $v$ y $w$ a campos vectoriales en $G$ invaraiantes por la izquierda, tomar su corchete, y evaluar en $e$.

<u>**Definición**</u>. Una **álgebra de Lie** es un espacio vectorial con un corchete bilineal antisimétrico que satiface la identidad de Jacobi.

<u>**Ejemplos**</u>. La álgebra de Lie de un grupo de Lie. Los campos vectoriales en una variedad. Los campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$ con diveregencia 0. Los campos vectoriales polinomiales en $\mathbb{R}^n$. El subespacio del último de polinomios de grado $\leq 2$. (Reto: encuentra otras subalgebras no conmutativas de dimensión finita de los campos vectoriales en $\mathbb{R}$ o demuestra que no existen).

<u>**Teorema**</u>. Dada una acción suave de un grupo de Lie $G$ en una variedad $M$ se define un homomorfismo de álgebras de Lie entre el álgebra de Lie de $G$ y el álgebra de campos vectoriales en $M$: a un elemento $X$ del algebra de Lie de $G$ se asocia el generador infinitesimal del grupo de un parámetro de difeomorfismos de $M$ que se obtiene al restringir la acción de $G$ en $M$ al subgrupo de un parámetro de $G$ que corresponde a $X$ en el teorema anterior.

<u>**Definición**</u>. Un **subgrupo de Lie** de un grupo de Lie $G$ es un grupo de Lie $H$ con un homomorfismo $\iota : H \to G$ que es una inmersión. (Una inmesrión es una función suave entre variedades tal que su derivada es inyectiva en cada punto).

Ojo: la imagen de $H$ en $G$ es un subgrupo, pero no tiene que ser una subvariedad, y no tiene que ser un cerrado. El ejemplo típico es el subgrupo $\mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ dado por $t \mapsto (e^{it}, e^{i\sqrt{2}t})$. Se puede demostrar que la imagen de $\mathbb{R}$ es un subgrupo isomorfo a $\mathbb{R}$ pero **denso** en $S^1 \times S^1$, por lo que no es cerrado y no es una subvariedad. Hay una buena razon para incluir estos ejemplos en la definición de subgrupo de Lie. Si insistimos que el subgrupo $\iota(H) \subset G$ sea una subvariedad de $G$ (resulta que para esto basta pedir que $\iota(H)$ sea un subconjunto cerrado) dejaremos afuera un hueco importante en la correspondencia entre subgrupos de Lie y subalgebras de Lie (ver más adelante).

→**2.25.** Encontrar las álgebras de Lie de todos los ejemplos de Notas núm. 1.

<u>**Teorema**</u>. El teorema de Frobenius (integración de una distribución involutiva).

<u>**Teorema**</u>. Correspondencia 1-1: subalgebras de Lie $\leftrightarrow$ subgrupos de Lie.

**Teorema**. Correspondencia 1-1: homomorfismos de algebras de Lie $\leftrightarrow$ homomorfismos de grupos de Lie, siempre y cuando el grupo dominio es simplemnente conexo.

Próxima sesión: enfoque en los grupos $\mathrm{SU}_2$ y $\mathrm{SO}_3$: su topología, sus álgebras de Lie, sus subgrupos de Lie, sus acciones lineales, relación con cuaterniones, sus fibracions y acciones sobre $S^2$ (Hopf), el homomorfismo $\mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_3$.