Tarea núm. 7

Para el jueves 25 mar 2010

Algunas definiciones y resultados vistos en clase:

- **Definición**. Un triple de enteros $x, y, z \in \mathbb{Z}$, es un triple pitagórico si $x^2 + y^2 = z^2$. El triple es primitivo si $(x, y, z) = 1$ (no existe un divisor común > 1.)
- **Teorema**. Para todo par de enteros a, b, el triple $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, $z = a^2 + b^2$, es pitagórico.

Problemas

1. Demuestra que para todo triple pitagórico (x, y, z) existe un $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que $(x, y, z) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$, donde $x_1 = a^2 - b^2$, $y_1 = 2ab$, $z_1 = a^2 + b^2$ para algunos $a, b \in \mathbb{Z}$. Cocluye que todo triple pitagórico primitivo (x, y, z), con $x, y, z > 0$, es de la forma $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$, para algunos $a, b \in \mathbb{Z}$.

   Sugerencia: pág. 48 del libro de Courant y Robbins.

2. Demuestra que el triple pitagórico $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ es primitivo ssi $(a, b) = 1$ y a, b no son ambos impares.

3. Demuestra que si (x, y, z) es un triple pitagórico entonces $60|xyz$.

   Sugerencia: basta demostrar que $3, 4, 5|xyz$. Para ver que $3|xyz$ toma la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ modulo 3 y concluye que $x \equiv 0$ ó $y \equiv 0 \bmod 3$, por lo que $xyz \equiv 0 \bmod 3$. Algo similar funciona para demostrar que $5|xyz$. Para demostrar $4|xyz$ estudia la equación $x^2 + y^2 = z^2 \bmod 8$.

4. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}^4$, no todos 0, sea $\Delta = ad - bc$ y consideramos el sistema de equaciones $ax + by = cx + dy = 0$. Demuestra que
   a) Si $\Delta \neq 0 \implies$ la única solucion al sistema es $x = y = 0$.
   b) Si $\Delta = 0 \implies$ existe una solución $\neq (0, 0)$. Además, dada tal solución, digamos (x_1, y_1), toda solución es de la forma $(x, y) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.