hecho de que $C_0^1 = C_1^1 = 1$, para probar, mediante inducción matemática, que

$$C_i^n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \qquad [9]$$

(Para todo entero positivo n, el símbolo $n!$—léase «factorial de n»—designa el producto de los n primeros enteros: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$. Y resulta conveniente definir también $0!$ por la igualdad $0! = 1$; de este modo [9] es válido para $i = 0$ e $i = n$.) Esta fórmula explícita para los coeficientes del desarrollo binómico se conoce con el nombre de *teorema del binomio*. (Véase también Cap. VIII, Suplemento, III, 1.)

Ejercicios: Demuéstrese por inducción matemática:

1. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

2. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \dots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$

*3. $1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} = \dfrac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$

*4. $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\dots(1+q^{2^n}) = \dfrac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$

Hállese la suma de las siguientes progresiones geométricas:

5. $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{(1+x^2)^2} + \dots + \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$

6. $1 + \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \dfrac{x^n}{(1+x^2)^n}$

7. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 + \dots + \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^n$

Utilizando las fórmulas [4] y [5], pruébese:

*8. $1^2 + 3^2 + \dots + (2n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$

*9. $1^3 + 3^3 + \dots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

10. Demuéstrense los mismos resultados directamente por inducción matemática.

*7. **Algunas observaciones a propósito de la inducción matemática.**—El principio de inducción matemática puede modificarse un poco y darle la siguiente forma: