Guia para el exámen final (8 de jun.)

Fecha del exámen: 8 jun, 2010, 11am

1. Demuestra los siguientes teoremas:
   a) El teorema de Euclides (existe una infinidad de primos).
   b) Existe una infinidad de primos de la forma (a) $4k+1$ (b) $4k+3$.
   c) El teorema chino de resíduos.
   d) El teorema de Fermat: $x^p \equiv x \bmod p$ para todo entero x y primo p.
   e) $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$, donde ϕ es la función de Euler y m, n son enteros positivos primos relativos. Encuentra un contra ejemplo para m, n que no son primos relativos.
   f) El teorema de Euler-Fermat: $x^{\phi(n)} \equiv 1 \bmod n$ para todo entero x tal que $(x, n) = 1$.
   g) El teorema fundamental del aritmética.

2. Para dos enteros k, n tal que $0 \leq k \leq n$ se define
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
   a) Demuestra que $\binom{n}{k}$ es entero (o sea, $k!(n-k)!$ divide a $n!$).
   b) Demuestra que $\binom{n}{k}$ es el número de subconjuntos con k elementos de un conjunto con n elementos.
   c) Demuestra que $(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ (igualdad de polinomios con coeficientes enteros).
   d) Demuestra que para p primo y k en el rango $0 < k < p$, p divide a $\binom{p}{k}$. Concluye que para todos enteros x, y y primo p, $(x+y)^p \equiv x + y \bmod p$. Encuentra un contra ejemplo cuando p no es primo.

3. Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Encuentra el número de los subconjuntos de A que ...
   a) contienen al número 7.
   b) tienen 7 elementos.
   c) tienen por lo menos 7 elementos.
   d) contienen a todos los números pares de A.
   e) contienen solamente números pares.
   f) contienen por lo menos 7 números pares.
   g) no contienen pares de números consecutivos.
   h) no contienen triples de números consecutivos.

4. *a)* Encuentra el desarrollo de $1/7$ en base 2, 3, 4, 5, 6 y 7.
   b) Encuentra los pares de enteros $n, m > 0$ tal que el desarrollo decimal de n/m es finito. Generaliza para base arbitraria $\neq 10$.
   c) Demuestra que para caulquer par de enteros $n, m > 0$, el desarrollo de n/m en una base es "eventualmente periódico"; i.e., si $n/m = a_1 a_2 \ldots a_k.b_1 b_2 b_3 \ldots$ (en cierta base) entonces existen enteros $N, T > 0$ (que dependen de la base) tal que $b_{i+T} = b_i$ para todo $i \geq N$.
   d) Demuestra que en el inciso anterior, el mínimo T que cumple $b_{i+T} = b_i$ para algun N y todo $i \geq N$ (el "periodo") satisface $T < m$.
   e) Encuentra el periodo del desarrollo decimal de $1/n$, $10 < n < 20$.

5. Encuentra el número de números enteros n en el rango $1 \leq n \leq 100$ tal que...
   a) $k|n$, $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
   b) $(n, 333) = 1$.
   c) $n \equiv 1 \bmod k$, $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
   d) existen enteros x, y tal que $nx + 17y = 1$.
   e) existe un entero x tal que $nx \equiv 1 \bmod 17$.
   f) existe un un entero $x > 0$ tal que $n^x \equiv 1 \bmod 17$.
   g) $8n \equiv 1 \bmod 17$.
   h) existe un un entero x tal que $nx \equiv 1 \bmod 17$, 18 y 19.
   i) existe un entero x tal que $x^n \equiv x \bmod 17$.
   j) para todo entero x, $x^n \equiv x \bmod 17$.
   k) n es primo.
   l) n es un producto de dos primos.
   m) n es un producto de dos primos distintos.
   n) n tiene exactamente 3 divisores positivos.
   ñ) n tiene por lo menos 3 divisores positivos.
   o) n es un cuadrado ($n = x^2$ para algun entero x).
   p) $\phi(n) = 3$ (ϕ es la función de Euler).
   q) $\phi(n) = 10$.
   r) la representación decimal de n contiene el dígito 7.
   s) la representación decimal de n contiene el dígito 7 exactamente dos veces.
   t) la representación decimal de n contiene el dígito 7 por lo menos dos veces.
   u) la representación de n en base 9 y 10 termina con el mismo dígito.
6. En cada caso, hay que encontrar todos los valores enteros de x que cumplen la condición dada.
   a) $7x \equiv 8 \bmod 9$.
   b) $3x \equiv 2 \bmod 100$.
   c) $17x \equiv 77 \bmod 100$.
   d) $x \equiv 777^{777} \bmod 100$.
   e) $x \equiv 7 \bmod 17$ y $x \equiv 8 \bmod 18$.
   f) $2010 \equiv x^{1984} \bmod 77$.
   g) $x \equiv 1 - 9 + 9^2 - 9^3 + \cdots + 9^{2010} \bmod 100$.
7. a) Sea $P_1 = (x_1, y_1)$ un punto del círculo en $\mathbb{R}^2$ dado por la ecuación $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ (el círculo con centro en (x_0, y_0) y radio $R > 0$). Demuestra que la tangente al círculo en P_1 está dada por la ecuación $(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = R^2$.
   b) Sea C el círculo con centro en $(1, 2)$ y radio 3. Encuentra ecuaciones para las tangentes a C que pasan por los puntos de intersección de C con los ejes de x y y.
8. Se dice que dos círculos son ortogonales si (1) tienen dos puntos de intersección y (2) sus tangentes en los puntos de intersección son ortogonales. Demuestra que dos círculos son ortogonales ssi $d^2 = R_1^2 + R_2^2$, donde d es la distancia entre sus centros y R_1, R_2 son sus radios.

9. Fijamos dos puntos distintos $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$.
   a) Demuestra que para todo $s > 0$ el conjunto de los puntos $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|P - P_1\| = s\|P - P_2\|$ es un círculo si $s \neq 1$, o una recta si $s = 1$.

   b) Encuentra el círculo (centro y radio) de los puntos $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|P - P_1\| = 2\|P - P_2\|$, donde $P_1 = (-1, 0), P_2 = (1, 0)$.

   c) Demuestra que para todo $t \in [0, 1]$ el conjunto de los puntos $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}$ tal que t es el cuadrado del coseno del ángulo P_1PP_2 es la unión de dos círculos que pasan por P_1, P_2 (menos P_1, P_2) si $t \neq 1$, o la recta que pasa por P_1, P_2 (menos P_1, P_2) si $t = 1$.

   d) Encuentra los círculos (centros y radios) de los puntos $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $|\cos\alpha| = 1/2$, donde α es el ángulo P_1PP_2 y donde $P_1 = (-1, 0), P_2 = (1, 0)$.

10. Fijamos dos puntos distintos $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$. Luego, para cada punto $P \in \mathbb{R}^2$, distinto de P_1, P_2, definimos dos círculos (o rectas) que pasan por P:

    a) el círculo que pasa por P, P_1, P_2 (o la recta que pasa por P_1, P_2, en caso que P está sobre esta recta);

    b) el círculo de puntos en el plano cuyo razón de distancias a P_1, P_2 es el mismo que para P (o recta, en caso que P es equidistante a P_1, P_2).

    Llamemos al primer círculo (o recta) "círculo tipo A" y al segundo "círculo tipo B".

    Nota: un círculo tipo A o B puede ser una recta.

    Dibuja para $P_1 = (-1, 0), P_2 = (1, 0)$ algunos de los círculos tipo A y B. Luego demuestra los siguientes incisos:
    a) La intersección de un par de círculos tipo A es $\{P_1, P_2\}$. La unión de todos los círculos tipo A es todo el plano.

    b) La intersección de un par de círculos tipo B es vacía. La unión de todos los círculos tipo B es todo el plano menos $\{P_1, P_2\}$.

    c) Cualquer par de círculos, uno de tipo A y el otro de tipo B, son ortogonales. (Nota: corrige este anunciado en caso que uno de estos "círculos" es una recta).

    d) Si $f : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \to \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ es una transformada de Mobius tal que $P_i' = f(P_i)$, $i = 1, 2$, entonces f manda los círculos de tipo A y B, con respecto a P_1, P_2, a los círculos de tipo A y B (respectivamente) con respecto a P_1', P_2'.

    e) Sea f una transformada de Mobius que manda P_1, P_2 a $(0, 0)$, ∞. Entonces f manda los círculos tipo A y B (con respecto a P_1, P_2) a las rectas que pasan por el origen y a los círculos con centro en el origen (respectivamente).

11. Demuestra los siguientes incisos:

    a) Sean M, M' dos matrices 2 por 2 con entradas complejas y determinante distinta de 0. Entonces M, M' determinan la misma transformada de Mobius ssi existe un $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, tal que $M' = \lambda M$.

    Nota: la tranformada de Mobius $f_M : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ asociada a una matriz con entradas complejas $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $\det(M) = ad - bc \neq 0$ está dada por $f(z) = (az + b)/(cz + d)$, con $f(-d/c) = \infty$ y $f(\infty) = a/c$ si $c \neq 0$, $f(\infty) = \infty$ si $c = 0$.

    b) Toda transformada de Mobius es invertible. La composición de dos transformadas de Mobius es una transformada de Mobius. La función identidad (de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) es una transformada de Mobius.

    c) Toda transformada de Mobius tiene 1 o 2 puntos fijos. Encuentra una condición sobre M tal que f_M tiene un solo puno fijo.

    Nota: un punto fijo de una función $f : X \to X$ es un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

d) Toda transformada de Mobius es una composición de dilatación, translación e inversión (en algun orden y número de veces).

Nota: dilatación es una transformada de la forma $z \mapsto \lambda z$, $\lambda \neq 0$, translación está dada por $z \mapsto z + z_0$, e inversión está dada por $z \mapsto 1/z$.

e) Toda transformada de Mobius preserva la razón cruzada.

Nota: la razón cruzada de $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ está dada por $[z_1, z_2; z_3, z_4] = \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right) / \left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (hay que modificar un poco esta definición para incluir el valor ∞, de manera similar a la definición de tranformada de Mobius.)

f) Dados 3 puntos distintos z_1, z_2, z_3 en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ existe una única transformada de Mobius que manda z_1, z_2, z_3 a $0, 1, \infty$ (en este orden).

g) Encuentra la transformada de Mobius que manda $-1, i, 1$ a $0, 1, \infty$ (en este orden).

h) Encuentra las transformadas de Mobius f tal $f(\infty) = \infty$.

i) Encuentra las transformadas de Mobius f tal $f(0) = 0$ y $f(\infty) = \infty$.

j) La imagen de cualquer recta o círculo bajo una transformada de Mobius es una recta o círculo.

k) Una transformada de Mobius f manda el eje real al eje real ssi es de la forma $f(z) = (az+b)/(cz+d)$ con a, b, c, d reales.

l) Encuentra todas las tranformadas de Mobius que preservan el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

m) Encuentra todas las transformadas de Mobius que mandan el círculo $x^2 + y^2 = 1$ al eje de x.

Sugerencia: encuentra una tal transformada primero y luego usa los incisos anteriores.

n) 4 puntos en $\mathbb{C}$ son cocíclicos (sobre el mismo círculo) o colineales (sobre la misma recta) ssi su razón cruzada está en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

12. *a*) ¿Cuántas veces durante el día coinciden las dos manecillas (de hora y minutos) del reloj?

Por ejemplo, al mediodía coinciden las manecillas.

Sugerencia: denota por $z, h \in \mathbb{C}$, $|z| = |h| = 1$, las posiciones de las manecillas de minutos y horas (resp.). Cambiamos un poco el mecanismo del reloj, de tal modo que las manecillas coinciden en la posición $z = h = 1$ y mueven en el sentido contrario al sentido usual (esto claramente no cambia la respuesta a la pregunta pero facilia un poco las cuentas). Entonces tenemos que $z = h^{12}$. Los momentos de coincidencia de las manecillas corresponden entonces a las soluciones de la ecuación $h = h^{12}$.

b) ¿Cuántas veces durante el día la posición de las dos manecillas del reloj tiene la propiedad que al intercambiar las posiciones de las manecillas se obtiene una posición legal de las manecillas del reloj?

Por ejemplo, esto sucede al mediodía. Pero si intercambiamos las manecillas a las 6:00, la manecilla chica nos va indicar que son las 12:00, lo cual es inconsistente con la posición de la manecilla grande (apuntando hacia el dígito 6).

Sugerencia: estudia el par de ecuaciones $z = h^{12}$, $h = z^{12}$.