## CAPÍTULO VI

# FUNCIONES Y LÍMITES

**Introducción.**—La parte principal de la matemática moderna se centra en torno a los conceptos de función y límite. En este capítulo los analizaremos de forma sistemática.

Una expresión tal como

$$x^2 + 2x - 3$$

no tiene valor definido mientras no se le asigne un valor a $x$; decimos que el valor de esta expresión es una *función* del valor de $x$, y escribimos:

$$x^2 + 2x - 3 = f(x).$$

Por ejemplo, para $x = 2$, resulta $2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 5$, por lo que $f(2) = 5$. De la misma manera, por sustitución directa, podemos hallar el valor de $f(x)$ para cualquier valor entero, fraccionario, irracional o incluso complejo de $x$.

El número de primos menores que $n$ es una función $\pi(n)$ del entero $n$. Dado un valor de $n$, $\pi(n)$ está determinado, aunque no se conoce ninguna expresión algebraica que permita calcularlo. El área de un triángulo es función de las longitudes de sus tres lados; varía al variar éstas y está determinada cuando estas longitudes toman valores definidos. Si se somete un plano a una transformación proyectiva o topológica, las coordenadas de un punto, después de efectuada la transformación, dependen, es decir, son funciones de las coordenadas primitivas. El concepto de función aparece en cuanto se relacionan cantidades mediante una relación física determinada. El volumen de un gas encerrado en un cilindro es función de la temperatura y de la presión que ejerce el pistón. La presión atmosférica, observada en un globo, es función de su altitud sobre el nivel del mar. Todo el campo de los fenómenos periódicos—las mareas, las vibraciones de una cuerda, la emisión de ondas luminosas por un filamento incandescente—está regido por las funciones trigonométricas elementales sen $x$ y cos $x$.

Para Leibniz (1646-1716), el primero que utilizó la palabra «función», y para los matemáticos del siglo XVIII, el concepto de relación funcional estaba más o menos identificado con la existencia de una fórmula matemática sencilla que expresara la naturaleza exacta de esa relación. Este concepto resultó ser demasiado restrictivo para las necesidades de la física matemática, por lo que la idea de función, junto con el concepto anejo de límite, hubo de pasar por un largo proceso de generalización y clarificación, del cual daremos una sucinta exposición en este capítulo.

## I. VARIABLE Y FUNCIÓN

**1. Definiciones y ejemplos.**—Se nos ofrecen a menudo entes matemáticos que estamos en libertad de elegir arbitrariamente entre todo un conjunto $S$ de objetos. Llamaremos *variable* a un objeto de esa clase, perteneciente al *campo* o *dominio* $S$. Es costumbre utilizar las últimas letras del abecedario para designar las variables; p. ej., si $S$ designa el conjunto de todos los números enteros, la variable $X$, definida en el dominio $S$, representa un entero arbitrario. Decimos que «la variable $X$ varía en el conjunto $S$» significando que podemos identificarla con cualquier lemento del conjunto $S$. Conviene utilizar variables cuando deseamos hacer afirmaciones acerca de objetos elegidos arbitrariamente dentro de un conjunto; p. ej., si $S$ sigue representando el conjunto de los números enteros, y $X$ e $Y$ son dos variables en el dominio $S$, la afirmación

$$X + Y = Y + X$$

es una expresión simbólica conveniente del hecho de que la suma de dos enteros es independiente del orden en que se tomen. Un caso particular está expresado por la igualdad

$$2 + 3 = 3 + 2,$$

en la cual aparecen sólo constantes. Para expresar la ley general, válida para cualquier par de números, se necesitan símbolos con el significado de variables.

No es necesario que el dominio $S$ de la variable $X$ sea un conjunto de números; p. ej., $S$ puede ser el conjunto de todos los círculos del plano; $X$ representará entonces un círculo determinado. O bien, $S$ puede representar el conjunto de todos los polígonos cerrados del plano, siendo entonces $X$ uno cualquiera de ellos. Tampoco es necesario que el dominio de una variable contenga un número infinito de elementos; p. ej., $X$ puede denotar uno cualquiera de los miembros de la población $S$ de una ciudad determinada en un momento prefijado. O bien, $X$ puede significar uno cualquiera de los restos posibles cuando se divide un entero por 5; en este caso, el dominio $S$ se compone de los cinco números 0, 1, 2, 3, 4.

El caso más importante de una variable numérica—para designarla se suele utilizar la letra $x$—es aquel en que el dominio de variabilidad $S$ es un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$ del eje numérico real. En este caso, diremos que $x$ es una *variable continua* en dicho intervalo. El dominio de variabilidad de una variable continua puede extenderse hasta el infinito. Así, $S$ puede ser el conjunto de todos los números reales y positivos, $x > 0$, o el conjunto de todos los números reales sin excepción. De manera similar, podemos considerar una variable $X$ cuyos valores sean los puntos de un plano, o de un dominio dado del mismo, tal como el interior de un rectángulo o de un círculo. Puesto que cada punto del plano está definido por sus dos coordenadas $x$ e $y$ respecto a un par fijo de ejes, en este caso diremos usualmente que tenemos un *par de variables continuas*, $x$ e $y$.

Puede ocurrir que a cada valor de la variable $X$ esté asociado otro valor determinado de otra variable $U$. Se dice entonces que $U$ es una *función* de $X$. El modo como ambas están enlazadas se expresa mediante un símbolo, tal como

$$U = F(X) \qquad \text{(léase: «}F\text{ de }X\text{»)}.$$

Si $X$ varía en el conjunto $S$, la variable $U$ variará en otro conjunto, que llamaremos, p. ej., $T$. Si $S$ representa el conjunto de todos los triángulos $X$ del plano, se puede definir una función $F(X)$ asignando a cada triángulo la longitud $U = F(X)$ de su perímetro; $T$ será entonces el conjunto de todos los números positivos. Observemos que dos triángulos distintos, $X_1$ y $X_2$, pueden tener el mismo perímetro, por lo que es posible la igualdad $F(X_1) = F(X_2)$, aunque sea $X_1 \neq X_2$. Una transformación proyectiva de un plano $S$ en otro $T$ asigna a cada punto $X$ de $S$ un solo punto $U$ de $T$, de acuerdo con una regla perfectamente establecida, que podemos expresar mediante el símbolo funcional $U = F(X)$. En este caso, $F(X_1) \neq F(X_2)$ si $X_1 \neq X_2$, por lo que diremos que la representación de $S$ en $T$ es *biunívoca* (véase página 86).

A menudo, se definen las funciones de una variable continua mediante expresiones algebraicas; he aquí algunos ejemplos:

$$u = x^2, \qquad u = \frac{1}{x}, \qquad u = \frac{1}{1+x^2}.$$

En la primera y en la última de estas expresiones, $x$ varía en el conjunto completo de los números reales, mientras que en la segunda, $x$ puede tomar cualquier valor real, excepto el 0, excluyéndose este valor, ya que $1/0$ no es un número.

El número $B(n)$ de los divisores primos de $n$ es una función de $n$, en la cual $n$ varía en el dominio de todos los números naturales. Con mayor generalidad, cualquier sucesión de números $a_1, a_2, a_3, \ldots$, puede considerarse como el conjunto de valores de una función $u = F(n)$, donde el dominio de variabilidad de la variable independiente $n$ es el conjunto de los números naturales. Sólo por brevedad, designamos mediante $a_n$ el $n$-ésimo término de la sucesión, en lugar de usar la notación funcional más explícita $F(n)$. Las expresiones consideradas en el capítulo primero:

$$S_1(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

son funciones de la variable entera $n$.

Si $U = F(X)$, se reserva de ordinario el nombre de *variable independiente* para $X$, mientras que $U$ se llama *variable dependiente*, ya que su valor depende del valor elegido para $X$.

Puede ocurrir que se asigne el mismo valor $U$ a todos los valores de $X$, estando formado ahora el conjunto $T$ exclusivamente por un solo elemento. Tenemos entonces un caso especial, en el cual el valor $U$ de la función no varía; es decir, $U$ es *constante*. Incluiremos este caso dentro del concepto general de función, aunque pueda parecer extraño al principiante, a quien, naturalmente, le parece que la importancia del concepto radica en que $U$ varía al variar $X$. Pero no nos causará ninguna dificultad y, de hecho, será útil el considerar una constante como caso especial de una variable cuyo «dominio de variabilidad» se compone de un solo elemento.

El concepto de función es de capital importancia, no sólo en la matemática pura, sino también en las aplicaciones prácticas. Las leyes de la física no son sino proposiciones respecto a la forma en que dependen ciertas cantidades de otras, cuando algunas de éstas varían. Así, el tono de la nota emitida por una cuerda vibrante depende de su longitud, de su peso y de la tensión a que está sometida; la presión atmosférica depende de la altitud; la energía de una bala, de su masa y de su velocidad. La tarea del físico consiste en determinar la naturaleza exacta o aproximada de esa dependencia funcional.

El concepto de función permite una caracterización exacta del movimiento. Si una partícula en movimiento se considera reducida a un punto en un espacio de tres dimensiones, siendo $x$, $y$, $z$ sus coordenadas rectangulares y designando por $t$ el tiempo, su movimiento queda completamente determinado si se dan sus coordenadas $x$, $y$, $z$ como funciones de $t$:

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t).$$

Así, si una partícula cae libremente a lo largo del eje vertical $z$, bajo la sola influencia de la gravedad,

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = -\tfrac{1}{2}gt^2,$$

donde $g$ es la aceleración de la gravedad. Si una partícula gira uniformemente en una circunferencia de radio unidad, en el plano $x$, $y$, su movimiento está caracterizado por las funciones

$$x = \cos \omega t, \qquad y = \operatorname{sen} \omega t,$$

donde $\omega$ es una constante, llamada velocidad angular del movimiento.

Una función matemática no es más que una ley que regula la interdependencia de cantidades variables. No presupone la existencia de una relación de «causa y efecto» entre ellas. Aunque en el lenguaje corriente se utiliza a menudo la palabra «función» con este último sentido, evitaremos todas esas interpretaciones filosóficas; p. ej., la ley de Boyle afirma que para un gas contenido en un recipiente, a temperatura constante, el producto de la presión $p$ y el volumen $v$ es una constante $c$ (cuyo valor depende a su vez de la temperatura); es decir:

$$pv = c.$$

Esta relación permite despejar $p$ en función de $v$, o $v$ en función de $p$; $p = c/v$, o bien, $v = c/p$, lo que no significa necesariamente que un cambio de presión sea la «causa» de la variación del volumen, ni tampoco lo contrario. Para el matemático, lo único que importa es la forma de la *relación* entre ambas variables.

Los matemáticos y los físicos difieren, a veces, en cuanto al aspecto del concepto de función, al que conceden gran importancia. Generalmente, los primeros insisten en la *ley de correspondencia*, o sea, la operación matemática que ha de aplicarse a la variable independiente $x$ para obtener el valor de la variable dependiente $u$. En este sentido, $f(\;)$ es un símbolo que representa una *operación matemática*; el valor $u = f(x)$ es el resultado de aplicar la operación $f(\;)$ al número $x$. Por otra parte, el físico se interesa generalmente por la *cantidad* $u$ en sí, más que por el procedimiento matemático mediante el cual se obtiene a partir de $x$. La resistencia $u$ que opone el aire a un cuerpo en movimiento depende de su velocidad $v$ y puede determinarse experimentalmente, sea o no conocida una fórmula matemática explícita para calcular $u = f(v)$. Lo que le interesa primordialmente al físico es la verdadera resistencia y no una fórmula matemática particular $f(v)$, excepto en cuanto el estudio de dicha fórmula contribuya a analizar el comportamiento de la cantidad $u$. Es ésta la actitud que se adopta generalmente cuando se *aplica* la matemática a la física o a la ingeniería. En cálculos más avanzados con funciones pueden evitarse muchas veces las confusiones estableciendo exactamente si se considera la operación $f(\ )$, mediante la cual se asigna a $x$ otra cantidad $u = f(x)$, o si interesa primordialmente $u$, que puede depender de manera enteramente distinta de otra variable $z$; p. ej., el área de un círculo viene dada por la función $u = f(x) = \pi x^2$, siendo $x$ el radio, y también por la función $u = g(z) = z^2/4\pi$, donde $z$ es la longitud de la circunferencia.

Tal vez, el tipo más sencillo de función matemática de una variable son los *polinomios*, de la forma:

$$u = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

con «coeficientes» constantes, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Después vienen las *funciones racionales*, tales como

$$u = \frac{1}{x}, \qquad u = \frac{1}{1+x^2}, \qquad u = \frac{2x+1}{x^4+3x^2+5},$$

que son cocientes de polinomios; y las *funciones trigonométricas*, sen $x$, cos $x$ y tg $x$ = sen $x$/cos $x$, para las cuales el método más cómodo de definición consiste en referirlas al círculo unidad $\xi^2 + \eta^2 = 1$, en el plano $\xi, \eta$. Si el punto $P(\xi, \eta)$ se mueve sobre la circunferencia de este círculo y es $x$ el ángulo que debe girar el semi-eje positivo $\xi$ para que coincida con $OP$, entonces sen $x$ y cos $x$ son las coordenadas de $P$ : cos $x = \xi$, sen $x = \eta$.

**2. Medida de los ángulos en radianes.**—En la práctica, los ángulos se miden en unidades que se obtienen dividiendo un ángulo recto en un cierto número de partes iguales. Si son 90, la unidad es el «grado» sexagesimal. Para nuestro sistema decimal sería mejor dividir el ángulo recto en 100 partes iguales, aunque equivaldría al mismo principio de medida. Sin embargo, para ciertos fines teóricos, es ventajoso utilizar un método esencialmente distinto para caracterizar la magnitud de un ángulo y que se llama su «medida en radianes». Numerosas e importantes fórmulas, en las cuales aparecen las funciones trigonométricas de un ángulo, adquieren una forma más sencilla con este sistema que si los ángulos se miden en grados.

Para hallar la medida en radianes de un ángulo, describiremos una circunferencia de radio igual a 1 y centro en el vértice del ángulo. Éste determinará un arco $s$ en la circunferencia, y definimos la longitud de ese arco como la *medida en radianes* del ángulo. Puesto que la circunferencia completa de radio 1 tiene la longitud $2\pi$, el ángulo de 360° tiene como medida $2\pi$ radianes. De aquí se deduce que si $x$

representa la medida en radianes de un ángulo, e $y$ su medida en grados, existe entre ambas la relación $y/360 = x/2\pi$; o sea,

$$\pi y = 180x.$$

Así, un ángulo de 90° ($y=90$) tiene una medida en radianes $x = 90\pi/180 = \pi/2$, etc. Por otra parte, el ángulo de un radián (ángulo cuya medida en radianes es $x = 1$) es el ángulo que subtiende un arco igual al radio del círculo. Expresado en grados, será igual a $y = 180/\pi = 57{,}2957\ldots{}^\circ$. Deberemos multiplicar siempre la medida en radianes $x$ de un ángulo por el factor $180/\pi$ para obtener su medida $y$ en grados.

La medida $x$ de un ángulo en radianes es, por consiguiente, igual al doble del área $A$ del sector del círculo unidad que determina ese ángulo, ya que la razón de dicha superficie a la total del círculo es igual a la del arco correspondiente a la longitud de la circunferencia: $x/2\pi = A/\pi$, $x = 2A$.

En lo que sigue, el ángulo $x$ significará siempre aquel cuya medida en radianes es $x$. Un ángulo de $x$ grados se escribirá siempre $x^\circ$, para evitar ambigüedad.

Es evidente que la medida en radianes es muy útil para las operaciones analíticas. Sin embargo, para los usos prácticos resulta incómoda. Puesto que $\pi$ es irracional, nunca podríamos volver al mismo punto de la circunferencia, si llevamos repetidas veces el ángulo unidad, es decir, aquel cuya medida en radianes es 1. La unidad usual es tal que, después de llevar 360 veces 1°, o cuatro veces 90°, se vuelve al punto de partida.

**3. Gráfica de una función. Funciones inversas.**—Muchas veces, una simple representación geométrica muestra claramente el carácter de una función. Si $x$, $u$, son coordenadas de un plano respecto a un par de ejes perpendiculares, las funciones lineales, tales como $u=ax+b$, están representadas por líneas rectas; las funciones cuadráticas, tales como $u = ax^2 + bx + c$, por parábolas; la función $u = 1/x$, por una hipérbola, etc. Por definición, la *gráfica* de una función cualquiera $u = f(x)$ se compone de todos los puntos del plano cuyas coordenadas $x$, $u$ cumplen la condición $u = f(x)$. Las funciones sen $x$, cos $x$, tg $x$, están representadas por las curvas de las figuras 151 y 152. Esas gráficas muestran claramente cómo aumentan o disminuyen los valores de la función al variar $x$.

Un método importante para introducir nuevas funciones es el siguiente: Comenzando por una función conocida $F(X)$, intentemos resolver la ecuación $U = F(X)$, respecto a $X$, de tal modo que $X$

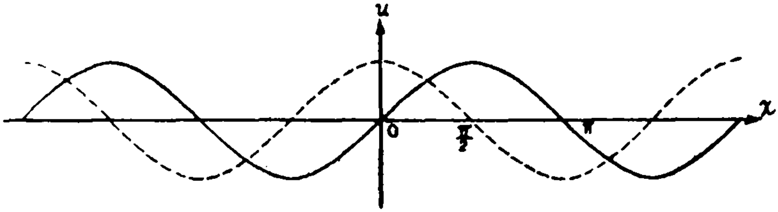


FIG. 151.—Gráficas de sen $x$ y cos $x$.

aparezca como función de $U$:

$$X = G(U)$$

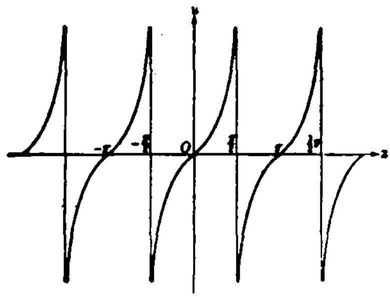


FIG. 152.—$u = \operatorname{tg} x$.

La función $G(U)$ se llamará entonces una *función inversa* de $F(X)$. Este procedimiento conduce a un resultado único sólo cuando la función $U = F(X)$ define una representación biunívoca del dominio $X$ en el $U$; es decir, si la desigualdad $X_1 \neq X_2$ entraña siempre esta otra: $F(X_1) \neq F(X_2)$; pues sólo entonces quedará definida unívocamente una $X$ para cada $U$.

El caso antes visto, en el cual $X$ significaba un triángulo cualquiera del plano, y $U = F(X)$ su perímetro, es un ejemplo oportuno. Es evidente que esta representación del conjunto de los triángulos $S$ en el conjunto $T$ de los números reales positivos no es biunívoca, ya que existen infinitos triángulos que tienen el mismo perímetro. Así, pues, en este caso la relación $U = F(X)$ no sirve para definir una función inversa única. Por otra parte, la función $m = 2n$, donde $n$ varía en todo el conjunto $S$ de los números enteros y $m$ en el conjunto $T$ de los enteros pares, proporciona una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos, y la función inversa $n = m/2$ está definida unívocamente. Otro ejemplo de una representación biunívoca lo proporciona la función

$$u = x^3.$$

Al variar $x$ en el conjunto de todos los números reales, $u$ recorrerá el mismo dominio, tomando cada valor una vez y sólo una. La función inversa, definida unívocamente, es

$$x = \sqrt[3]{u}.$$

En el caso de la función

$$u = x^2,$$

la función inversa no está determinada unívocamente. Puesto que $u = x^2 = (-x)^2$, a cada valor positivo de $u$ corresponderán dos de $x$. Pero si, como es costumbre, se conviene que el símbolo $\sqrt{u}$ represente el número *positivo* cuyo cuadrado es $u$, la función inversa

$$x = \sqrt{u}$$

existe, siempre que limitemos la variación de $x$ y de $u$ a valores positivos.

Observando la gráfica de una función $u = f(x)$ de una variable, puede deducirse de una ojeada la existencia de una función inversa única. Ésta estará unívocamente definida, si a cada valor de $u$ corresponde otro de $x$ y uno solo. En la gráfica, esto significa que ninguna paralela al eje $x$ corta a la curva en más de un punto, lo que ocurrirá ciertamente si la función $u = f(x)$ es *monótona;* es decir, si aumenta o disminuye constantemente al aumentar $x$; p. ej., si $u = f(x)$ es monótona creciente, para $x_1 < x_2$ se tendrá siempre $u_1 = f(x_1) < u_2 = f(x_2)$. De aquí se deduce que para un cierto valor de $u$ puede existir a lo más un $x$, tal que $u = f(x)$, con lo que la función inversa quedará definida unívocamente. La gráfica de la función inversa $x = g(u)$ se obtiene simplemente haciendo girar el dibujo primitivo un ángulo de 180° alrededor de la bisectriz del primer cuadrante (Fig. 154), con lo cual se cambian entre sí las posiciones de los ejes $x$ y $u$. La nueva posición de la curva muestra $x$ como función de $u$. En la posición original de la gráfica, $u$ aparece como la altura por encima del eje horizontal $x$, mientras que, después de la rotación, la misma curva muestra $x$ como altura sobre el eje horizontal $u$.

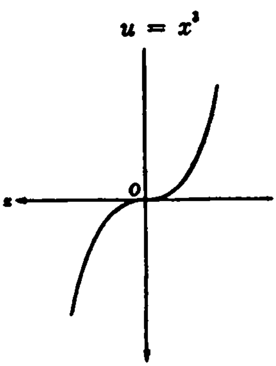

FIG. 153.—$u = x^3$.

Las observaciones del párrafo anterior pueden aclararse considerando el caso de la función

$$u = \operatorname{tg} x.$$

Esta función es monótona para $-\pi/2 < x < \pi/2$ (Fig. 152). Los valores de $u$, que crecen monótonamente con $x$, varían desde $-\infty$ a $+\infty$, por lo que la función inversa

$$x = g(u).$$

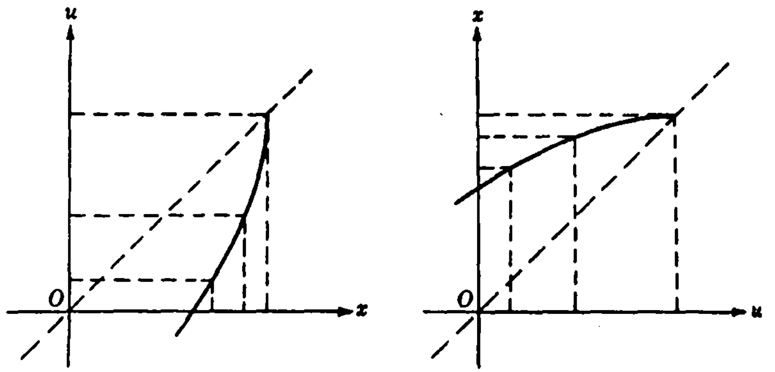


FIG. 154.—Funciones inversas.

está definida para todo valor de $u$. Se designa por $\operatorname{tg}^{-1}u$, o bien por arc tg $u$. Así, arc tg $1 = \pi/4$, ya que tg $\pi/4 = 1$. La figura 155 muestra esta función.

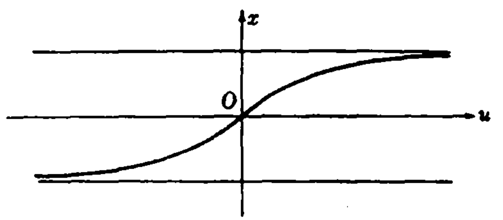


FIG. 155.—$x = \operatorname{arc\,tg} u$.

**4. Funciones compuestas.**—Otro método para crear nuevas funciones, partiendo de dos o más previamente dadas, consiste en formar funciones *compuestas*; p. ej., la función

$$u = f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

se «compone» de estas dos más sencillas:

$$z = g(x) = 1 + x^2, \qquad u = h(z) = \sqrt{z},$$

y puede escribirse de la manera siguiente:

$$u = f(x) = h(g[x]) \qquad \text{(léase «}h\text{ de }g\text{ de }x\text{»).}$$

Análogamente, la función

$$u = f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$$

está compuesta por las tres funciones:

$$z = g(x) = 1 - x^2, \qquad w = h(z) = \sqrt{z}, \qquad u = k(w) = \frac{1}{w},$$

por lo que resulta:

$$u = f(x) = k(h[g(x)]).$$

La función

$$u = f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

se compone de las dos funciones siguientes:

$$z = g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad u = h(z) = \operatorname{sen} z.$$

La función $f(x)$ no está definida para $x = 0$, puesto que para este valor la expresión $1/x$ no tiene significado. La gráfica de esta función notable se obtiene de la del seno. Sabemos que $\operatorname{sen} z = 0$ para $z = k\pi$, donde $k$ es cualquier entero positivo o negativo. Además,

$$\operatorname{sen} z = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad z = (4k+1)\dfrac{\pi}{2}, \\ -1 & \text{para} \quad z = (4k-1)\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

siendo $k$ un entero cualquiera. De donde se deduce:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x = \dfrac{1}{k\pi}, \\ 1 & \text{para} \quad x = \dfrac{2}{(4k+1)\pi}, \\ -1 & \text{para} \quad x = \dfrac{2}{(4k-1)\pi} \end{cases}$$

Si damos sucesivamente a $k$ los valores $k = 1, 2, 3, 4, \cdots$, como los denominadores de estas fracciones aumentan indefinidamente, los valores de $x$ para los que la función $\operatorname{sen}(1/x)$ es igual a $1, -1, 0$, se acumularán cada vez más en torno al punto $x = 0$. Entre uno de esos puntos y el origen existirá además un número infinito de oscilaciones de la función, cuya gráfica aparece en la figura 156.

**5. Continuidad.**—Las gráficas de las funciones que hemos considerado hasta ahora proporcionan una idea intuitiva del concepto de continuidad. En una sección posterior analizaremos con toda precisión este concepto, después de haber establecido de forma rigurosa el de límite. Hablando en términos generales, diremos que una fun-

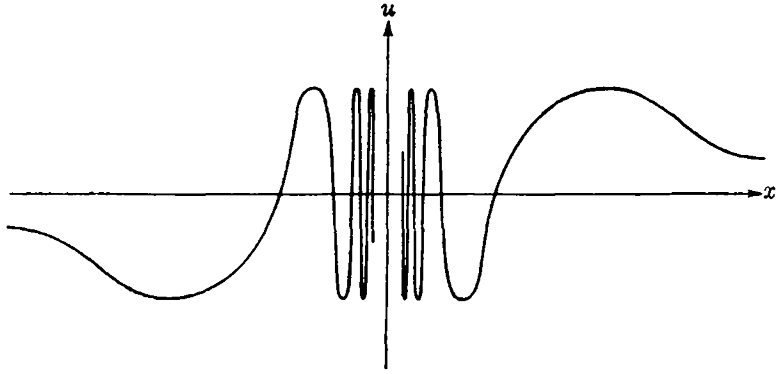


FIG. 156.—$u = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

ción es continua cuando la gráfica es una curva sin interrupción (véase pág. 321). Puede estudiarse la continuidad de una función dada, $u = f(x)$, haciendo que la variable independiente $x$ se aproxime indefinidamente, por la derecha y por la izquierda, hacia un valor prefijado $x_1$. A menos que la función $u = f(x)$ sea constante en el entorno de $x_1$, su valor cambiará. Si el valor de $f(x)$ tiende al de $f(x_1)$, es decir, al valor de la función en el punto prefijado $x = x_1$, *cualquiera que sea la forma como tienda* x *a* $x_1$, *por un lado o por el otro,* se dice que la función es *continua* en el punto $x_1$. Si esto es cierto para todo punto $x$ de un cierto intervalo, se dice que la función es *continua en el intervalo.*

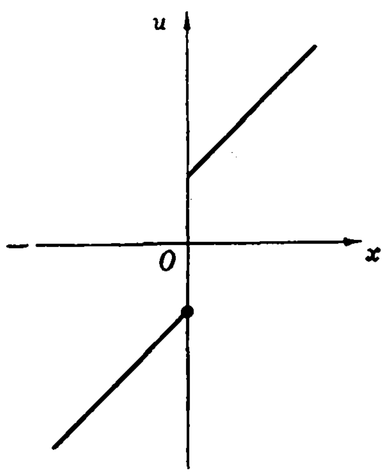


**FIG. 157.—Discontinuidad finita.**

Aunque toda función que esté representada por una curva sin interrupciones es continua, es fácil definir funciones que no son continuas en todo punto; p. ej., la función de la figura 157, definida para todo valor de $x$, mediante el convenio

$$f(x) = 1 + x \quad \text{para} \quad x > 0$$
$$f(x) = -1 + x \quad \text{para} \quad x < 0$$

es discontinua en el punto $x_1 = 0$, donde toma el valor $-1$. Si intentamos dibujar una gráfica de la función, tendremos que levantar el lápiz del papel en este punto. Si nos acercamos al valor $x_1 = 0$ desde la derecha, $f(x)$ tiende a $+1$, que difiere del verdadero valor en ese punto. No basta, para establecer la continuidad, el hecho de que al tender $x$ a 0, por la *izquierda*, $f(x)$ tienda a $-1$.

La función $f(x)$ definida para todo $x$ por el convenio

$$f(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \neq 0, \qquad f(0) = 1,$$

presenta una discontinuidad de distinto tipo en el punto $x_1 = 0$. Aquí, al tender $x$ a 0, existen ambos límites, tanto por la izquierda como por la derecha, y son iguales; pero este límite común no coincide con $f(0)$.

Otro tipo de discontinuidad es el que ofrece la función de la figura 158

$$u = f(x) = \frac{1}{x^2},$$

en el punto $x = 0$. Si se hace tender $x$ a cero, sea por la derecha o por la izquierda, $u$ tiende a infinito; la gráfica de la función se interrumpe en este punto, y pequeñas variaciones de $x$ en el entorno de $x = 0$ pueden producir cambios muy grandes en $u$. En sentido estricto, el valor de la función no está definido para $x = 0$, ya que infinito no es un número y, en consecuencia, no podemos decir que $f(x)$ sea infinita para $x = 0$. Por tanto, nos limitamos a decir que $f(x)$ «tiende a infinito» al tender $x$ a cero.

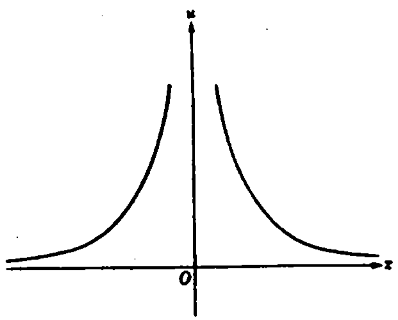

FIG. 158.—Discontinuidad infinita.

Un tipo distinto de discontinuidad aparece en la función $u = \operatorname{sen}(1/x)$, en el punto $x = 0$, como resulta evidente de la gráfica de la función (Fig. 156).

Los ejemplos precedentes ponen de manifiesto las diversas formas en que puede dejar de ser continua una función en un punto $x = x_1$:

1) Es posible a veces conseguir que la función sea continua en $x = x_1$, mediante una definición adecuada de su valor para $x = x_1$; p. ej., la función $u = x/x$ es constantemente igual a 1 si $x \neq 0$; no está, en cambio, definida para $x = 0$, porque $0/0$ es un símbolo ca-

rente de significado. Pero si convenimos en este caso que el valor $u = 1$ corresponde también al valor $x = 0$, la función así generalizada resulta continua para todo valor de $x$, sin excepción. El mismo efecto se consigue si definimos $f(0) = 0$ para la función que hemos considerado anteriormente. Una discontinuidad de este tipo se dice que es *evitable.*

2) Pueden existir límites distintos cuando $x$ tiende a $x_1$, según lo haga por la derecha o por la izquierda, como se ve en la figura 157.

3) Es también posible que no existan estos límites laterales, como ocurre en la figura 156.

4) La función puede tender a infinito al tender $x$ a $x_1$, como en el caso de la figura 158.

Las discontinuidades de los últimos tres tipos se dice que son *esenciales*; no pueden evitarse por una adecuada o nueva definición de la función en el punto $x = x_1$.

**Ejercicios:**

1. Represéntense las funciones

$$\frac{x-1}{x^2}, \frac{x^2-1}{x^2+1}, \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

y determínense sus discontinuidades.

2. Dibújense las funciones $x$ sen $(1/x)$ y $x^2$ sen $(1/x)$ y verifíquese su continuidad para $x = 0$, si se define en ambos casos $u = 0$ para $x = 0$.

*3. Demuéstrese que la función arc tg $(1/x)$ tiene una discontinuidad del segundo tipo (salto), para $x = 0$.

***6. Funciones de varias variables.**—Volvamos a nuestra discusión sistemática del concepto de función. Si la variable independiente $P$ es un punto del plano, de coordenadas $x$ e $y$, y si a cada punto $P$ corresponde un número único $u$, que puede ser, p. ej., la distancia del punto $P$ al origen, escribiremos en general

$$u = f(x, y).$$

Se utiliza también esta notación si, como a menudo sucede, las dos cantidades $x$ e $y$ aparecen desde un principio como variables independientes; p. ej., la presión $u$ de un gas es función del volumen $x$ y de la temperatura $y$, y el área de un triángulo es una función $u = f(x, y, z)$ de las longitudes $x$, $y$, $z$ de sus tres lados.

Así como una gráfica nos da la representación geométrica de una función de una variable, una superficie en un espacio de tres dimensiones, de coordenadas $x$, $y$, $u$, permite la representación geométrica de una función $u = f(x, y)$ de dos variables. Asignamos a cada punto

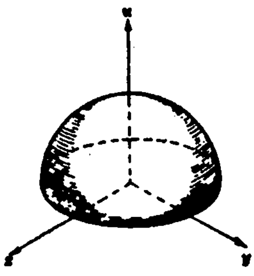


FIG. 159.—Semiesfera.

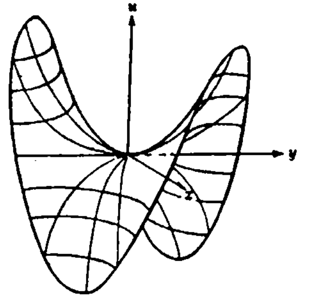


FIG. 160.—Paraboloide hiperbólico.

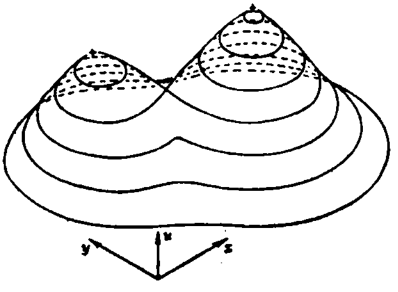


FIG. 161.—Una superficie $u = f(x, y)$.

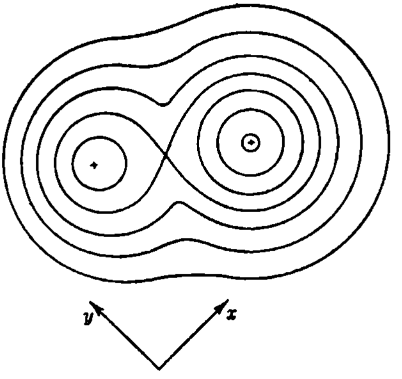


FIG. 162.—Curvas de nivel correspondientes.

$x$, $y$ del plano otro punto del espacio, cuyas coordenadas son $x$, $y$ y $u = f(x, y)$. Así, la función $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ está representada por una superficie esférica, de ecuación $u^2 + x^2 + y^2 = 1$; la función lineal $u = ax + by + c$ está representada por un plano, y la función $u = xy$, por un paraboloide hiperbólico, etc.

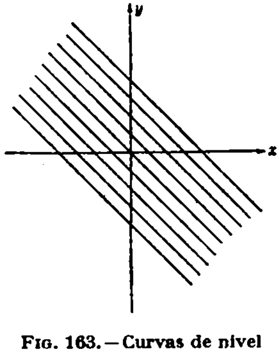


FIG. 163.—Curvas de nivel de $u = x + y$.

Puede darse una representación distinta de la función $u = f(x, y)$ sin salir del plano $x$, $y$, mediante *curvas de nivel.* En lugar de considerar el «panorama» tridimensional $u = f(x, y)$, dibujamos, como en un mapa altimétrico, las curvas de nivel de la función, representando las proyecciones de todos los puntos de igual cota $u$ sobre el plano $x$, $y$. Estas curvas de nivel son simplemente las curvas

$f(x, y) = c$, en las cuales $c$ permanece constante para cada curva. Así, la función $u = x + y$ queda caracterizada por la figura 163. Las curvas de nivel de una superficie esférica son una familia de circunferencias concéntricas. La función $u = x^2 + y^2$, que representa un paraboloide de revolución, está caracterizada, análogamente, por un sistema de circunferencias (Fig. 165). Por medio de números adscritos a las diferentes curvas puede indicarse su cota, $u = c$.

En física aparecen funciones de varias variables al pretender describir el movimiento de un medio continuo; p. ej., si una cuerda tensa entre dos puntos del eje de las $x$ se deforma de tal modo que la partícula que ocupa el punto $x$ se desplaza perpendicularmente al eje

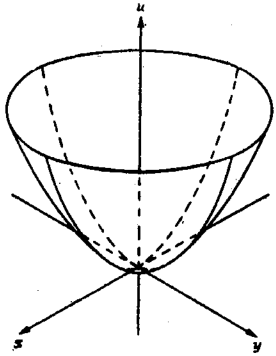


FIG. 164.—Paraboloide de revolución.

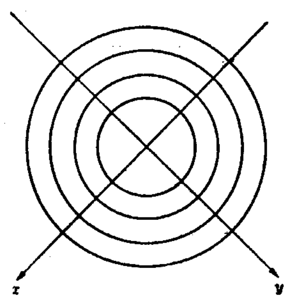


FIG. 165.—Curvas de nivel correspondientes.

una cierta distancia, y se la suelta después, vibrará de tal manera que la partícula cuya abscisa inicial era $x$, se encontrará en el instante $t$ a una distancia del eje $x$ igual a $u = f(x, t)$. El movimiento queda completamente descrito en cuanto se conoce la función $u = f(x, t)$.

Es posible aplicar a las funciones de varias variables la definición de continuidad dada para las de una sola variable. Se dice que una función $u = f(x, y)$ es continua en el punto $x = x_1$, $y = y_1$, si $f(x, y)$ tiende a $f(x_1, y_1)$ cuando el punto $x$, $y$ tiende al $x_1$, $y_1$, en cualquier forma y desde cualquier dirección.

Existe, sin embargo, una diferencia importante entre las funciones de una y de varias variables. En este último caso, el concepto de función inversa carece de significado, pues es imposible resolver una ecuación $u = f(x, y)$; p. ej., $u = x + y$, de tal manera que cada una de las cantidades independientes $x$ e $y$ aparezca expresada en función de *una sola* cantidad $u$. Pero esta diferencia en el aspecto de las funciones de una y de varias variables desaparece si vemos en el concepto de función la idea de una representación o transformación.

***7. Funciones y transformaciones.**—Una correspondencia entre los puntos de una recta $l$, caracterizados por su abscisa $x$, y los puntos de otra recta $l'$, determinados por su abscisa $x'$, es simplemente una función $x' = f(x)$. Si esa correspondencia es biunívoca, tendremos también la función inversa $x = g(x')$. El ejemplo más sencillo es el de una transformación por proyección, que, en general, se caracteriza (lo afirmamos sin demostración) por una función de la forma $x' = f(x) = (ax + b)/(cx + d)$, donde $a$, $b$, $c$ y $d$ son constantes. En este caso, la función inversa es $x = g(x') = (-dx' + b)/(cx' - a)$.

Las representaciones en dos dimensiones de un plano $\pi$, de coordenadas $x$ e $y$, sobre otro plano $\pi'$ de coordenadas $x'$ e $y'$, no pueden expresarse por una sola función $x' = f(x)$, sino que se requieren dos funciones de dos variables:

$$x' = f(x, y), \qquad y' = g(x, y).$$

P. ej., una transformación proyectiva está dada por el sistema de funciones

$$x' = \frac{ax + by + c}{gx + hy + k},$$
$$y' = \frac{dx + ey + f}{gx + hy + k},$$

donde $a, b, \ldots, k$, son constantes, y $x, y, x', y'$, son las coordenadas de ambos planos, respectivamente. Desde este punto de vista, la idea de una transformación inversa adquiere perfecto sentido. Simplemente, debemos *resolver este sistema de ecuaciones*, considerando $x$ e $y$ como incógnitas, en función de $x'$ e $y'$. Geométricamente, esto equivale a encontrar la transformación inversa de $\pi'$ en $\pi$. Estará definida unívocamente si la correspondencia entre los puntos de ambos planos es unívoca.

Las transformaciones del plano estudiadas en topología no están dadas por simples ecuaciones algebraicas, sino por un sistema cualquiera de funciones,

$$x' = f(x, y), \qquad y' = g(x, y),$$

que definen una transformación biunívoca y bicontinua.

**Ejercicios:**

*1. Demuéstrese que la transformación por inversión (Cap. III, pág. 154) en el círculo unidad está dada analíticamente por las ecuaciones $x' = x/(x^2 + y^2)$, $y' = y/(x^2 + y^2)$. Determínese la transformación inversa. Demuéstrese, analíticamente, que la inversión transforma la totalidad de rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.

2. Demuéstrese que mediante la transformación $x' = (ax + b)/(cx + d)$ cuatro puntos del eje $x$ se transforman en otros cuatro del eje $x'$, con la misma razón doble (véase pág. 187).

## II. LÍMITES

**1. Límite de una sucesión $a_n$.**—Como ya hemos visto, el concepto de continuidad de una función se basa sobre el de límite. Hasta ahora hemos utilizado dicho concepto en una forma más o menos intuitiva. En este párrafo y los siguientes lo consideraremos de una manera más sistemática, comenzando por el estudio de las sucesiones, que son más sencillas que las funciones de una variable continua.

En el capítulo II encontramos ya sucesiones de números $a_n$ y estudiamos sus límites, al crecer $n$ indefinidamente o «tender a infinito»; p. ej., la sucesión, cuyo término enésimo es $a_n = 1/n$,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \qquad [1]$$

tiene el límite 0 al crecer $n$, es decir,

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty \qquad [2]$$

Intentemos formular exactamente lo que se quiere decir con eso; al avanzar en la sucesión, los términos resultan cada vez menores. Después del término de lugar cien, todos son menores que 1/100; después del de lugar mil, menores que 1/1000, etc. Ninguno de ellos es efectivamente igual a cero; pero si *avanzamos suficientemente* en la sucesión, podemos estar seguros de que todos los términos difieren de 0 *tan poco como queramos*.

La única dificultad en esta explicación consiste en que no es completamente claro el significado de las frases en cursiva. ¿Hasta dónde debemos ir para «avanzar suficientemente», y cuánto es «tan poco como queramos»? Si podemos dar un sentido preciso a estas frases, tendrá también un significado preciso la relación [2].

Una interpretación geométrica nos ayudará a aclarar más la cuestión. Si representamos los términos de la sucesión [1] por sus correspondientes puntos sobre una recta, observamos que éstos parecen acumularse alrededor del punto $O$. Elijamos un intervalo $I$ de centro en el punto $O$ y de amplitud $2\varepsilon$, de tal modo que se extienda una distancia $\varepsilon$ a cada lado del punto $O$. Si elegimos $\varepsilon = 10$, naturalmente *todos* los términos $a_n = 1/n$ de la sucesión quedarán dentro de $I$. Si $\varepsilon = 1/10$, salvo los 10 primeros términos, todos ellos, a partir del $a_{11}$, es decir,

$$1/11,\ 1/12,\ 1/13,\ 1/14,\ \cdots,$$

quedarán dentro de $I$. Y si tomamos $\varepsilon = 1/1000$, sólo los primeros mil términos de la sucesión quedarán fuera de $I$, mientras que a partir del $a_{1001}$, todos los infinitos términos

$$a_{1001},\ a_{1002},\ a_{1003},\ \cdots$$

serán interiores a $I$. Es evidente que este razonamiento es válido cualquiera que sea el número positivo $\varepsilon$; una vez elegido éste, por muy pequeño que sea, podemos encontrar un entero $N$ lo bastante grande que

$$1/N < \varepsilon .$$

De aquí se deduce que todos los términos $a_n$ de la sucesión, para los cuales $n \geqslant N$ serán interiores a $I$ y que sólo un número finito de ellos, $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... $a_{n-1}$, quedará fuera. El punto importante es éste: *primeramente*, se asigna al intervalo $I$ una amplitud arbitraria mediante la elección de $\varepsilon$; *después*, puede encontrarse un entero conveniente $N$. Este proceso de elegir primero un número $\varepsilon$ y encontrar después un entero conveniente $N$ puede efectuarse cualquiera que sea el número positivo $\varepsilon$, por pequeño que se haya tomado, lo que proporciona un significado preciso a la afirmación de que todos los términos de la sucesión [1] difieren de 0 tan poco como se quiera, siempre que se avance suficientemente en la misma.

Resumiendo: sea $\varepsilon$ un número positivo cualquiera; entonces, podemos encontrar un entero $N$, tal que todos los términos $a_n$ de la sucesión [1], para los cuales $n \geqslant N$ son interiores a un intervalo $I$ de amplitud total $2\varepsilon$ y cuyo centro es el punto $O$. Éste es el significado preciso de la relación [2].

Basándonos en este ejemplo, podemos dar ahora una definición rigurosa de la afirmación general: «la sucesión de números reales $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., tiene el límite $a$». Incluímos $a$ en el interior de un intervalo $I$ de la recta numérica: si el intervalo es pequeño, algunos de los números $a_n$ quedarán fuera de él; pero apenas sea $n$ suficientemente grande, p. ej., igual o mayor que un cierto entero $N$, todos los números $a_n$, para los cuales $n \geqslant N$, serán interiores al intervalo. Naturalmente, es necesario tomar $N$ muy grande, si es muy pequeño el intervalo elegido $I$; pero cualquiera que sea su amplitud, debe existir un entero $N$ si la sucesión ha de tener como límite $a$.

Se expresa simbólicamente que una sucesión $a_n$ tiene el límite $a$ de la siguiente manera:

$$\lim a_n = a, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

o simplemente

$$a_n \to a, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

(léase: a$_n$ *tiende a* a, o *converge hacia* a).

Puede formularse de forma más concisa la definición de convergencia de una sucesión $a_n$ hacia un límite $a$, de la manera siguiente: *La sucesión* $a_1, a_2, a_3, \ldots$, *tiene el límite* a, *cuando* n *tiende a infinito, si para todo número positivo* $\varepsilon$, *por pequeño que sea, existe un entero* N *(que depende de* $\varepsilon$*), tal que*

$$|a - a_n| < \varepsilon \quad \textit{para todo} \quad n \geqslant N. \qquad [3]$$

Ésta es la formulación abstracta del concepto de límite de una sucesión. No es de extrañar que cuando se encuentra por primera vez no sea posible captarla inmediatamente en toda su profundidad. Algunos autores adoptan una actitud poco feliz, presentando esta definición al lector sin una preparación adecuada, como si dar una explicación no resultara muy honroso para la dignidad de un matemático.

La definición sugiere la siguiente disputa entre dos personas $A$ y $B$. $A$ exige que los $a_n$ se acerquen a la cantidad fijada $a$ con una aproximación mayor que un cierto margen $\varepsilon = \varepsilon_1$. $B$ prueba que satisface esa exigencia demostrando que existe un número entero $N = N_1$ tal que todos los $a_n$ posteriores al elemento $a_{N_1}$ cumplen esa condición. Entonces $A$ se hace más exigente y propone un nuevo margen $\varepsilon = \varepsilon_2$, más pequeño. $B$ accede de nuevo a su demanda encontrando otro entero $N = N_2$ (tal vez mucho mayor). *Si* B *puede satisfacer siempre a* A, *por pequeño que sea el margen que ésta imponga, se produce la situación que hemos expresado mediante* a$_n \to$ a.

Existe una dificultad psicológica auténtica para comprender esta definición precisa de límite. Nuestra intuición nos sugiere una idea «dinámica» del límite, como si fuera el resultado de un «movimiento»: recorremos la sucesión de enteros $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, y observamos el comportamiento de la sucesión $a_n$. Sentimos que debe ser posible observar la convergencia $a_n \to a$; pero es imposible dar una formulación matemática clara de esta actitud «natural». Para llegar a una definición precisa, tenemos que *invertir* el orden del proceso; en lugar de observar primero la variable independiente $n$ y después la dependiente $a_n$, debemos basar nuestra definición en lo que es necesario hacer si queremos verificar la afirmación según la cual $a_n \to a$. Para proceder de esa manera, debemos elegir primeramente una distancia arbitrariamente pequeña en torno de $a$, y determinar si podemos satisfacer esa condición eligiendo un valor suficientemente grande de la variable independiente $n$. Dando después denominaciones simbólicas, $\varepsilon$ y $N$, a las palabras «arbitrariamente pequeño» y «$n$ suficientemente grande», llegamos a la definición precisa de límite.

Consideremos como nuevo ejemplo la sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots,$$

en la cual, $a_n = n/(n+1)$. Digo que el límite es 1. Si el lector elige un intervalo cuyo centro sea el punto 1 y para el cual $\varepsilon = 1/10$, puedo satisfacer su exigencia [3] tomando $N = 10$, pues

$$0 < 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10}$$

en cuanto $n \geqslant 10$. Si el lector se hace más exigente y elige $\varepsilon = 1/1000$, puedo satisfacer esa demanda tomando $N = 1000$, y análogamente, para cualquier número positivo $\varepsilon$, por pequeño que sea, pues me bastará elegir un entero $N$ mayor que $1/\varepsilon$. Este proceso de asignar una distancia arbitrariamente pequeña $\varepsilon$ alrededor del número $a$ y demostrar después que los términos de la sucesión $a_n$ están todos dentro de una distancia $\varepsilon$ de $a$, si avanzamos en ella suficientemente, es la descripción minuciosa del hecho de que lím $a_n = a$.

Si los términos de la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$, se expresan en forma decimal, la afirmación lím $a_n = a$ significa simplemente que para cualquier entero positivo $m$, las primeras $m$ cifras de $a_n$ coinciden con las $m$ primeras del desarrollo decimal del número fijo $a$, con tal que se tome $n$ suficientemente grande; p. ej., mayor o igual que un cierto entero $N$ (que depende de $m$). Esto corresponde simplemente a elegir $\varepsilon$ en la forma $10^{-m}$.

Existe otro método muy sugestivo de expresar el concepto de límite. Si lím $a_n = a$, y encerramos $a$ en el interior de un intervalo $I$, entonces, por pequeño que sea $I$, todos los números $a_n$, para los cuales $n$ es igual o mayor que un entero $N$, se encontrarán dentro de $I$, por lo que, contando desde el principio de la sucesión, a lo sumo *un número finito*, N — 1, *de términos*

$$a_1, a_2, \cdots, a_{N-1},$$

*pueden estar fuera de* I. Si $I$ es muy pequeño, $N$ será muy grande, p. ej., cien o mil millones, pero siempre quedará fuera de $I$ sólo un número finito de términos, mientras que los infinitos restantes serán interiores a $I$.

Podemos decir que *casi todos* los términos de una cierta sucesión tienen una determinada propiedad si sólo un número finito de ellos, no importa lo grande que sea, no la poseen; p. ej., «casi todos» los enteros positivos son mayores que 1 000 000 000 000. Utilizando esta terminología, la afirmación lím $a_n = a$ equivale a decir que *si* I *es un intervalo cualquiera cuyo centro es* a, *casi todos los números* $a_n$ *se encuentran dentro de* I.

Conviene observar de pasada que no debe suponerse que todos los términos $a_n$ de la sucesión han de tener necesariamente valores distintos. Es posible que algunos, infinitos, o incluso *todos* ellos, sean iguales al valor límite $a$; p. ej., la sucesión $a_1 = 0$, $a_2 = 0, \dots, a_n = 0, \dots$ es perfectamente legítima y, naturalmente, su límite es cero.

Una sucesión $a_n$ que tiene un límite $a$ se llama *convergente*. Una sucesión $a_n$ que carece de límite se llama *divergente*.

**Ejercicios:** Demuéstrese:

1. La sucesión $a_n = n/(n^2 + 1)$ tiene límite 0. (*Indicación*: $a_n = 1/(n + 1/n)$ es menor que $1/n$ y mayor que 0.)
2. La sucesión $a_n = (n^2 + 1)/(n^3 + 1)$ tiene el límite 0. (*Indicación*: $a_n = (1 + 1/n^2)/(n + 1/n^2)$ está comprendido entre 0 y $2/n$.)
3. La sucesión 1, 2, 3, 4, $\cdots$ y las sucesiones oscilantes

$$1, 2, 1, 2, \cdots,$$
$$1, -1, 1, -1, \cdots \text{ es decir, } a_n = (-1)^n,$$
$$1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4, 1, 1/5, \cdots,$$

*no* tienen límite.

Si en una sucesión $a_n$ los términos llegan a ser mayores que cualquier número prefijado $K$, diremos que $a_n$ *tiende a infinito* y escribiremos: lím $a_n = \infty$, o $a_n \to \infty$; p. ej., $n^2 \to \infty$ y $2^n \to \infty$. Esta terminología es útil, aunque quizá no del todo satisfactoria, puesto que no puede considerarse $\infty$ como un número $a$. *Una sucesión que tiende a infinito se llama también divergente.*

**Ejercicios:** Demuéstrese que las sucesiones $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$, $a_n = \dfrac{n^3-1}{n+1}$ y $a_n = \dfrac{n^n}{n^2+1}$ tienden todas a infinito.

A veces, los principiantes cometen el error de creer que un paso al límite, cuando $n \to \infty$, se lleva a cabo simplemente sustituyendo $n$ por $\infty$ en la expresión de $a_n$; p. ej., $1/n \to 0$, puesto que «$1/\infty = 0$». Pero el símbolo $\infty$ no es un número, y su utilización en la expresión

$1/\infty$ es ilegítima. Imaginarse el límite de una sucesión como si fuera el «último» término $a_n$, cuando $n = \infty$, significa desconocer el verdadero sentido del concepto y oscurece sus consecuencias.

**2. Sucesiones monótonas.**—En la definición general dada en la página 303 no se exigió una forma determinada para que la sucesión $a_1, a_2, a_3, ...,$ tendiera a su límite. El ejemplo más sencillo es el de las sucesiones que se llaman monótonas, tales como

$$1/2,\ 2/3,\ 3/4,\ \cdots,\ n/(n+1)\ \cdots.$$

Cada término de esta sucesión es mayor que el precedente, pues $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2} = 1 - \dfrac{1}{n+2} > 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1} = a_n$. Se denominan *monótonas crecientes* las sucesiones de este tipo para las cuales $a_{n+1} > a_n$. Análogamente, una sucesión para la cual $a_n > a_{n+1}$ como, p. ej., 1, 1/2, 1/3, ..., se llama *monótona decreciente*. Las sucesiones de este tipo se aproximan a su límite exclusivamente desde un lado; en contraste con ello, existen sucesiones que oscilan tal como: $-1, +1/2, -1/3, +1/4, ...,$ que se aproxima a su límite 0 desde ambos lados (véase Fig. 11).

Es fácil determinar el comportamiento de una sucesión monótona; puede carecer de límite y exceder a cualquier número, como, p. ej.,

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,$$

en la cual $a_n = n$, o la sucesión

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ \cdots,$$

donde $a_n$ es el $n$-ésimo número primo, $p_n$.

En este caso la sucesión tiende a infinito; pero si los términos de una sucesión monótona creciente están acotados; es decir, si todo término es menor que una cota superior $B$, conocida de antemano, resulta intuitivo que debe tender a un cierto límite $a$, que será menor,

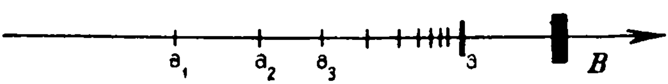


FIG. 166.—Sucesión monótona acotada.

o a lo sumo igual a $B$. Esta proposición, que llamaremos *principio de las sucesiones monótonas*, se enuncia así: *Toda sucesión monótona creciente, que está acotada superiormente, tiene límite.* (Puede hacerse una afirmación análoga para una sucesión monótona *decreciente*, que esté acotada *inferiormente*.) Es notable que no haga falta conocer previamente el valor del límite $a$; el teorema afirma que, si se cumplen las condiciones impuestas, tal límite existe. Naturalmente, este teorema depende de la introducción de los números irracionales, pues de otra manera no sería siempre cierto. Como ya hemos visto en el capítulo II, cualquier número irracional (p. ej., $\sqrt{2}$) es límite de una sucesión monótona creciente y acotada de fracciones racionales decimales, cuyos términos se obtienen tomando las $n$ primeras cifras de una fracción decimal de infinitas cifras.

*Aunque el principio de las sucesiones monótonas resulta evidente a la intuición, es instructivo dar una demostración rigurosa del mismo. Vamos a ver que dicho principio es una consecuencia lógica de las definiciones de número real y de límite.

Supongamos que los números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ forman una sucesión creciente, pero acotada. Podemos expresarlos en forma de fracciones decimales de infinitas cifras.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= A_1, p_1p_2p_3 \cdots, \\
a_2 &= A_2, q_1q_2q_3 \cdots, \\
a_3 &= A_3, r_1r_2r_3 \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

donde los $A_i$ representan números enteros y los $p_i$, $q_i$, etc., son cifras de 0 a 9. Puesto que la sucesión $a_1, a_2, a_3 \ldots$ está *acotada*, estos enteros no pueden crecer indefinidamente, y como la sucesión es *monótona creciente* la sucesión de los enteros $A_1, A_2, A_3 \cdots$, *permanecerá constante después de alcanzar su valor máximo.* Sea $A$ dicho máximo y supongamos que lo alcance en la $N_0$-ésima fila. Recorramos ahora la segunda columna $p_1, q_1, r_1, \cdots$, limitando nuestra atención a los términos de la $N_0$-ésima fila y las siguientes. Si $x_1$ es la mayor cifra que aparece en esta columna después de la $N_0$-ésima fila, $x$ aparecerá *reiteradamente* después de su primera aparición, lo que puede ocurrir en la $N_1$-ésima fila, siendo $N_1 > N_0$, pues si las cifras de esta columna disminuyeran después de esta fila, la sucesión $a_1$, $a_2, a_3, \cdots$, no sería monótona creciente. Consideremos ahora las cifras $p_2, q_2, r_2, \cdots$, de la tercera columna. Un razonamiento análogo demuestra que después de un cierto entero $N_2 \geqslant N_1$, las cifras de la tercera columna son constantemente iguales a $x_2$. Repitiendo este proceso para las 4.ª, 5.ª, $\cdots$, columnas, obtenemos los dígitos $x_3, x_4, x_5 \cdots$ y una sucesión correspondiente de números enteros $N_3, N_4$, $N_5, \cdots$ Es fácil ver que el número

$$a = A, x_1x_2x_3x_4 \cdots$$

es el límite de la sucesión $a_1, a_2, a_3 \ldots$ Pues si se elige un $\varepsilon > 10^{-m}$, para todos los $n \geqslant N_m$, la parte entera y las $m$ primeras cifras después de la coma de $a_m$ coincidirán con las de $a$, por lo que la diferencia $|a - a_n|$ no puede exceder a $10^{-m}$. Puesto que es posible lograr esto para cualquier $\varepsilon$ positivo, por pequeño que sea, ya que bastará tomar $m$ suficientemente grande, el teorema queda demostrado.

Se llega a este mismo resultado basándonos en cualquiera de las otras definiciones de número real, dadas en el capítulo II; p. ej., mediante los encajes de intervalos o las cortaduras de Dedekind. Estas demostraciones pueden encontrarse en cualquier tratado de análisis matemático.

Este principio de las sucesiones monótonas podía haberse utilizado en el capítulo II para definir la suma y el producto de dos números con infinitas cifras decimales:

$$a = A, a_1a_2a_3 \cdots,$$
$$b = B, b_1b_2b_3 \cdots$$

Es imposible sumar o multiplicar dos expresiones de ese tipo de la manera corriente, es decir, empezando por la última cifra decimal de la derecha, pues no existe tal última cifra. (Como ejemplo, el lector puede intentar sumar los dos números decimales 0,333333 ··· y 0,989898 ···). Pero si $x_n$ representa la fracción decimal *finita*, obtenida tomando $n$ cifras decimales en $a$ y $b$, y sumando de la manera ordinaria, la sucesión $x_1, x_2, x_3, \cdots$ será monótona creciente y estará acotada (p. ej., por el entero $A + B + 2$). De ahí que esta sucesión tenga límite y podemos definir $a + b = \lim x_n$. Un método análogo sirve para definir el producto $ab$. Mediante las leyes de cálculo de la aritmética es posible extender estas definiciones hasta abarcar todos los casos, cualesquiera que sean los signos de $a$ y $b$.

**Ejercicio:** Demuéstrese de esta manera que la suma de los dos números considerados antes es 1,323232 ··· = 131/99.

La importancia del concepto de límite en matemática reside en que *muchos números se definen exclusivamente mediante límites*, a menudo como límites de sucesiones monótonas acotadas. Por esta razón, el campo de los números racionales, en el cual dichos límites pueden no existir, resulta demasiado restringido para las necesidades de la matemática.

**3. El número «e» de Euler.**—El número $e$ ocupa un lugar destacado en la matemática, junto con el número $\pi$ de Arquímedes, desde la publicación, en 1748, de la obra de Euler *Introductio in Analysin Infinitorum*. Proporciona un excelente ejemplo del modo en que el principio de las sucesiones monótonas puede servir para definir un nuevo número real. Utilizando el símbolo

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$

para el producto de los $n$ primeros números enteros, estudiemos la sucesión $a_1, a_2, a_3$, en la cual

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \tag{4}$$

Los términos $a_n$ forman una sucesión monótona creciente, puesto que se obtiene $a_{n+1}$ sumando a $a_n$ una cantidad positiva $1/(n + 1)!$. Además, los números $a_n$ están acotados superiormente:

$$a_n < B = 3, \tag{5}$$

pues se tiene:

$$\frac{1}{s!} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} \cdots \frac{1}{s} < \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{s-1}},$$

de donde resulta:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - (^1/_2)^n}{1 - {}^1/_2} =$$
$$= 1 + 2(1 - (^1/_2)^n) < 3,$$

utilizando la fórmula dada en la página 20 para la suma de los $n$ primeros términos de una progresión geométrica. De acuerdo con el principio de las sucesiones monótonas, cuando $n$ tiende a $\infty$, $a_n$ debe tender a un límite, y *a este límite lo llamaremos* e. Para expresar que $e = \text{lím}\, a_n$, podemos escribir $e$ en forma de serie:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots. \qquad [6]$$

Esta «igualdad», que incluye una sucesión de puntos suspensivos, es simplemente otro método de expresar las dos afirmaciones siguientes:

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

y

$$a_n \to e \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

La serie [6] permite calcular $e$ con la aproximación que se desee; p. ej., la suma (con ocho cifras decimales) de los términos de [6] hasta $1/12!$ inclusive es $\Sigma = 2{,}71828183...$ (El lector debe verificar este resultado.) Es fácil estimar el «error»; esto es, la diferencia entre ese valor y el verdadero de $e$. Para la diferencia $(e - \Sigma)$ tenemos la expresión

$$\frac{1}{13!} + \frac{1}{14!} + \cdots < \frac{1}{13!}\left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} + \cdots\right) =$$
$$= \frac{1}{13!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{13}} = \frac{1}{12 \cdot 12!}$$

Esta diferencia es tan pequeña que no puede afectar a la octava cifra decimal de $\Sigma$. Suponiendo que exista un posible error en la última cifra del valor dado más arriba, tenemos $e = 2{,}7182818$, con siete cifras decimales exactas.

**El número* e *es irracional.*—Para demostrarlo procederemos indirectamente, suponiendo que fuera $e = p/q$, donde $p$ y $q$ son enteros, y viendo que esta hipótesis conduce a un absurdo. Puesto que sabemos que $2 < e < 3$, $e$ no puede ser entero, por lo que $q$ debe ser, por lo menos, igual a 2. Multiplicando ambos miembros de [6] por $q! = 2 \cdot 3 \cdots q$, se tiene

$$e \cdot q! = p \cdot 2 \cdot 3 \cdots (q-1) = [q! + q! + 3 \cdot 4 \cdots q + 4 \cdot 5 \cdots q +$$

$$+ \cdots + (q-1)q + q + 1] + \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots. \qquad [7]$$

Evidentemente, el primer miembro es un número entero; en el segundo miembro, la expresión entre corchetes lo es igualmente; pero los restantes términos tienen suma positiva menor que $^1/_2$, por lo que no pueden componer un entero, ya que $q > 2$ y los términos de la serie $1/(q+1) + \cdots$ son menores que los correspondientes de la serie geométrica $1/3 + 1/3^2 + 1/3^3 \cdots$, cuya suma es 1/2. De aquí se deduce que [7] entraña una contradicción: el entero del primer miembro no puede ser igual al valor del segundo, pues éste no es un entero, por cuanto se compone de un entero y de un número positivo menor que 1/2.

**4. El número $\pi$.**—Como se sabe desde el bachillerato, la longitud de la circunferencia de radio 1 puede definirse como el límite de la sucesión de los perímetros de polígonos regulares de un número creciente de lados. La longitud de la circunferencia así definida se representa mediante el símbolo $2\pi$. Con más precisión, si $p_n$ indica el perímetro del polígono inscrito y $q_n$ el del polígono circunscrito, se tiene $p_n < 2\pi < q_n$. Además, al crecer $n$, cada una de esas sucesiones $p_n$ y $q_n$ tiende monótonamente a $2\pi$, por lo que, con cada paso, disminuye el error de la aproximación a $2\pi$ que representan $p_n$ o $q_n$.

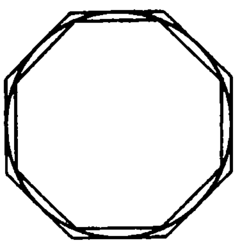

FIG. 167.—Aproximaciones de la circunferencia mediante polígonos.

En la página 135 encontramos la expresión

$$p_{2^m} = 2^m \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$$

que contiene $m - 1$ signos de raíces cuadradas, fórmula que puede utilizarse para calcular un valor aproximado de $2\pi$.

**Ejercicios:**

1. Determínese el valor aproximado de $\pi$ que proporcionan $p_4$, $p_8$ y $p_{16}$.

*2. Hállese una fórmula para $q_{2^m}$.

*Utilícese esa fórmula para calcular $q_4$, $q_8$ y $q_{16}$. Habiendo calculado $p_{16}$ y $q_{16}$, determínese una cota superior y otra inferior de $\pi$.

¿Qué *es* el número $\pi$? La desigualdad $p_n < 2\pi < q_n$ nos da una respuesta completa, pues determina un encaje de intervalos que definen el punto $2\pi$. Sin embargo, esa respuesta deja algo que desear, pues no nos dice nada acerca de la naturaleza de $\pi$ como número real; ¿es racional, irracional, algebraico o trascendente? Ya hemos dicho en la página 152 que $\pi$ es un número trascendente y, por consiguiente, irracional. Al revés de lo que ocurre con $e$, la demostración de la irracionalidad de $\pi$, que J. H. Lambert (1728-1777) dió por primera vez, es bastante difícil, por lo que no la intentaremos reproducir aquí. Sin embargo, hay algunas otras propiedades referentes a $\pi$ que están a nuestro alcance. Recordando aquella afirmación de que los números enteros son el material básico de la matemática, podemos preguntarnos si el número $\pi$ tiene alguna relación sencilla con los enteros. Aunque se ha calculado la expresión decimal de $\pi$ con varios centenares de cifras, no aparece en ellas ninguna regularidad, lo que no es sorprendente, puesto que $\pi$ y 10 nada tienen de común. Pero en el siglo XVIII, Euler y otros matemáticos encontraron bellísimas expresiones, mediante series y productos infinitos, que establecen un lazo de unión entre los números enteros y $\pi$. Tal vez la más sencilla de todas estas fórmulas sea la siguiente:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

que expresa $\pi/4$ como límite de la sucesión de sumas parciales:

$$s_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

Demostraremos esta fórmula en el capítulo VIII. Otra serie relativa al número $\pi$ es la siguiente:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots;$$

Una notable expresión de $\pi$ fué descubierta por el matemático inglés John Wallis (1616-1703); su fórmula dice que

$$\left\{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right\} \to \frac{\pi}{2} \text{ cuando } n \to \infty,$$

lo que a veces se escribe abreviadamente así:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

La expresión que figura en el segundo miembro se llama un *producto infinito*.

La demostración de estas dos fórmulas puede consultarse en cualquier tratado de análisis matemático.

***5. Fracciones continuas.**—Las fracciones continuas conducen a casos interesantes de pasos al límite. Una fracción continua, tal como

$$\frac{57}{17} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}},$$

representa un número racional. Vimos en la página 57 que todo número racional puede escribirse en esa forma por medio del algoritmo de Euclides. Sin embargo, para los números irracionales, el algoritmo no termina después de un número finito de pasos, sino que conduce a una sucesión de fracciones de longitud creciente, cada una de las cuales representa un número racional. En particular, todos los números reales algebraicos (véase pág. 112) de grado 2 pueden expresarse de este modo. Como ejemplo, sea el número $x = \sqrt{2} - 1$, raíz de la ecuación cuadrática

$$x^2 + 2x = 1, \qquad x = \frac{1}{2 + x}$$

Si en el segundo miembro se sustituye $x$ por $1/(2 + x)$, se obtiene la expresión

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + x}},$$

y a continuación,

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + x}}},$$

etcétera.

De forma que después de reiterar $n$ veces obtenemos la ecuación

$$x = \left.\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots \cfrac{1}{2 + x}}}}\right\} (n \text{ veces})$$

Al hacer tender $n$ a infinito se obtiene la «fracción continua indefinida»

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

Esta notable fórmula relaciona $\sqrt{2}$ con los números enteros de forma más sorprendente que lo hace la expresión decimal de $\sqrt{2}$, en la cual no aparece ninguna regularidad en la sucesión de sus cifras.

Para la raíz positiva de cualquier ecuación cuadrática de la forma

$$x^2 = ax + 1, \qquad \text{o} \qquad x = a + \frac{1}{x},$$

se tiene el desarrollo

$$x = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ddots}}}$$

P. ej., para $a = 1$, obtenemos:

$$x = {}^1/_2(1 + \sqrt{5}) = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

Estos ejemplos son casos particulares de un teorema general, según el cual *las raíces reales de una ecuación cuadrática de coeficientes enteros admiten desarrollos en fracción continua periódica*, exactamente como los números racionales poseen desarrollos decimales periódicos.

Euler encontró desarrollos en fracción continua para $e$ y $\pi$, casi tan sencillos como los anteriores. Daremos los siguientes, sin demostración:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}}}}}};$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \ddots}}}}},$$

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ddots}}}}}}$$

## III. LÍMITES POR APROXIMACIÓN CONTINUA

**1. Introducción. Definición general.**—En la página 301 y sucesivas pudimos dar una formulación precisa de la afirmación siguiente: «la sucesión $a_n$ (es decir, la función $a_n = F(n)$ de la variable entera $n$) tiene el límite $a$ cuando $n$ tiende a infinito». Daremos ahora la definición correspondiente a esta otra afirmación: «la función $u = f(x)$ de la variable continua $x$ tiene el límite $a$ cuando $x$ tiende a $x_1$». En forma intuitiva, utilizamos ya este concepto de límite por aproximación continua de la variable independiente $x$ en la página 295, para comprobar la continuidad de la función $f(x)$.

Comenzaremos, como allí, por un caso particular. La función $f(x) = (x + x^3)/x$ está definida para todos los valores de $x$, salvo el $x = 0$, pues en este punto se anula el denominador. Al trazar la gráfica de la función $u = f(x)$ para valores de $x$ del entorno de 0, parece evidente que, al «acercarse» $x$ a cero por ambos lados, el correspondiente valor de $u = f(x)$ «se aproxima» al límite 1. Para dar una descripción precisa de este hecho debemos encontrar una fórmula explícita de la diferencia entre el valor de $f(x)$ y el número fijo 1:

$$f(x) - 1 = \frac{x + x^3}{x} - 1 = \frac{x + x^3 - x}{x} = \frac{x^3}{x}$$

Si convenimos en considerar exclusivamente valores de $x$ próximos a 0, pero no el valor $x = 0$ [para el cual no está definida $f(x)$], podemos dividir numerador y denominador del segundo miembro de esta ecuación por $x$, obteniendo la fórmula más sencilla

$$f(x) - 1 = x^2.$$

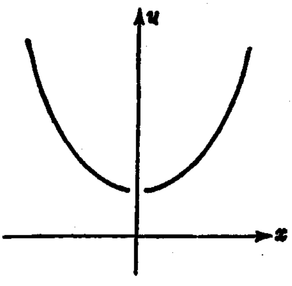


FIG. 168.—$u = (x + x^3)/x$.

Es evidente que esta diferencia puede llegar a ser *tan pequeña como deseemos*, siempre que $x$ esté limitado en un intervalo *suficientemente pequeño* del entorno de 0. Así, para $x = \pm 1/10$, $f(x) - 1 = 1/100$; para $x = \pm 1/100$, $f(x) - 1 = 1/10000$, etc. En general, si $\varepsilon$ es un número positivo, por pequeño que sea, la diferencia entre $f(x)$ y 1 será menor que $\varepsilon$, con tal que la distancia de $x$ a 0 sea menor que el número $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Pues entonces, si $|x| < \sqrt{\varepsilon}$, resulta $|f(x) - 1| = |x|^2 < \varepsilon$.

Es completa la analogía con nuestra definición de límite; en la página 303 decíamos que «la sucesión $a_n$ tiene el límite $a$ cuando $n$ tiende a infinito, si en correspondencia con todo número positivo $\varepsilon$, por pequeño que sea, puede encontrarse un entero $N$ (que depende de $\varepsilon$), y tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ para todos los $n$ que satisfacen la desigualdad $n \geqslant N$».

En el caso de una función $f(x)$ de una variable continua $x$, cuando ésta tiende a un valor finito $x_1$, nos limitamos a reemplazar el $n$ «suficientemente grande», dado por $N$, por un $x_1$ «suficientemente próximo», determinado por un número $\delta$, llegando así a la siguiente definición de límite por aproximación continua, que Cauchy fué el primero en enunciar, alrededor de 1820: *La función* f(x) *tiene el límite* a *cuando* x *tiende a* $x_1$ *si, para todo número positivo* $\varepsilon$*, por pequeño que sea, puede encontrarse otro* $\delta$ *(también positivo y dependiente de* $\varepsilon$*), tal que*

$$|f(x) - a| < \varepsilon$$

*para todo* $x \neq x_1$ *que satisfaga la desigualdad*

$$|x - x_1| < \delta.$$

En este caso, escribiremos:

$$f(x) \to a \qquad \text{cuando} \qquad x \to x_1.$$

En el caso de la función $f(x) = (x + x^3)/x$, demostramos anteriormente que $f(x)$ tiende al límite 1 cuando $x$ tiende al valor $x_1 = 0$. En dicho caso bastó elegir $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

**2. Observaciones sobre el concepto de límite.**—La definición ($\varepsilon$, $\delta$) de límite es el producto de más de un siglo de intentos y encierra en unas pocas palabras el resultado de los persistentes esfuerzos para establecer este concepto sobre una base matemática firme. Los conceptos fundamentales del cálculo—los de derivada e integral—pueden definirse únicamente mediante pasos al límite. Una dificultad, al parecer insuperable, bloqueó durante mucho tiempo el camino hacia la comprensión clara y la definición precisa del concepto de límite.

En el estudio del movimiento, los matemáticos de los siglos XVII y XVIII aceptaron como algo natural el concepto de cantidad $x$, que cambia continuamente y tiende, en un flujo continuo, hacia un valor límite $x_1$. Asociado a este flujo primario del tiempo, o de una cantidad $x$ que se comportaba como él, consideraron un valor secundario, $u = f(x)$, que seguía el movimiento de $x$. El problema consistía en dar un significado matemático preciso a la idea de que $f(x)$ «tiende» o «se aproxima» a un valor fijo $a$, cuando $x$ tiende hacia $x_1$.

Desde la época de Zenón y de sus paradojas, el concepto intuitivo, físico o metafísico, de la continuidad del movimiento ha eludido todas las tentativas de una formulación matemática precisa. No hay ninguna dificultad en proceder, paso a paso, a través de una sucesión discreta de valores $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ; pero, al estudiar una variable continua $x$ que se extiende por todo un intervalo de la recta numérica, es imposible decir cómo ha de «aproximarse» $x$ a un valor fijo $x_1$, de tal manera que tome consecutivamente y en su orden de magnitud todos los valores del intervalo. Pues los puntos de una recta forman un conjunto denso, y no existe un punto «siguiente» después de haber alcanzado uno prefijado. Ciertamente, la idea intuitiva del continuo posee una realidad psicológica en la mente humana; pero es imposible recurrir a ella para resolver una dificultad matemática; debe subsistir una discrepancia entre la idea intuitiva y el lenguaje matemático ideado para describir los rasgos científicamente importantes de nuestra intuición en una nomenclatura lógicamente precisa. Las paradojas de Zenón son una importante indicación de esta discrepancia.

El mérito de Cauchy consistió en comprender que, en lo que respecta a los conceptos matemáticos, puede y debe omitirse cualquier referencia a una idea intuitiva previa de la continuidad del movimiento. Como ocurre a menudo, se abrió una senda hacia el progreso científico, renunciando a las tentativas en una dirección metafísica, y operando exclusivamente con nociones que, en principio, corresponden a fenómenos «observables». Si analizamos lo que realmente queremos dar a entender mediante las palabras «aproximación continua», o cómo debemos proceder para verificarla en un caso especial, nos veremos obligados a aceptar una definición tal como la de Cauchy. Esta definición es *estática:* no presupone la idea intuitiva de movimiento. Por el contrario, sólo mediante una definición estática semejante es posible realizar un análisis matemático preciso de la continuidad del movimiento en el tiempo, y dar de lado las paradojas de Zenón en lo que a la ciencia matemática respecta.

En la definición ($\varepsilon$, $\delta$), la variable independiente no se mueve; en ningún sentido físico puede decirse que «tienda» o «se aproxime» al límite $x_1$. Permanecen todavía estas frases y el símbolo $\to$, y ningún matemático precisa perder de vista el fondo intuitivo que expresan; pero cuando se trata de verificar la existencia de un límite en un proceso científico real, debe aplicarse la definición ($\varepsilon$, $\delta$) exclusivamente. Que esta idea corresponda satisfactoriamente o no a la noción intuitiva «dinámica», es un problema idéntico al de establecer si los axiomas de la geometría procuran una descripción satisfactoria del concepto intuitivo de espacio. Ambas formulaciones prescinden de algo que tiene intuitivamente una existencia real, pero proporcionan un esquema matemático adecuado para expresar nuestro conocimiento de esos conceptos.

Como en el caso del límite de una sucesión, la clave de la definición de Cauchy consiste en invertir el orden «natural» en el que se consideran las variables. Primero fijamos nuestra atención sobre un intervalo $\varepsilon$ para la variable dependiente, tratando después de determinar otro intervalo conveniente $\delta$ para la variable independiente. Afirmar que «$f(x) \to a$, cuando $x \to x_1$» es sólo una manera breve de decir que eso puede hacerse para cualquier número positivo $\varepsilon$. En particular, ninguna *parte* de esta afirmación (p. ej., «$x \to x_1$») tiene significado por sí misma.

Es necesario insistir sobre este punto: al hacer «tender» $x$ a $x_1$ podemos permitir que $x$ sea mayor o menor que $x_1$, pero excluímos expresamente la igualdad, requiriendo que $x \neq x_1$; $x$ tiende a $x_1$, pero sin *tomar* nunca el valor $x_1$. Así podemos aplicar nuestra definición a funciones que no están definidas para $x = x_1$, pero que tienen límites determinados, cuando $x$ tiende a $x_1$, como, p. ej., la función $f(x) = (x + x^3)/x$, considerada en la página 315. La exclusión de $x = x_1$ corresponde a lo que hacíamos en los límites de las sucesiones $a_n$ para $n \to \infty$; p. ej., $a_n = 1/n$, en la cual no sustituímos $n$ por $\infty$ en la fórmula.

Sin embargo, cuando $x$ tiende a $x_1$, $f(x)$ puede aproximarse al límite $a$ de tal manera que existan valores $x \neq x_1$ para los cuales $f(x) = a$; p. ej., al considerar la función $f(x) = x/x$ cuando $x$ tiende a cero, no permitimos nunca que $x$ sea igual a 0, pero $f(x) = 1$, para todo $x \neq 0$, y el límite $a$ existe y es igual a 1, de acuerdo con nuestra definición.

**3. El límite de (sen x)/x.**—Si $x$ designa la medida de un ángulo en radianes, la expresión $(\operatorname{sen} x)/x$ está definida para todo $x$, excepto $x=0$, para el cual se convierte en el símbolo sin significado 0/0. El lector que posea una tabla de líneas trigonométricas podrá calcular el valor de $\operatorname{sen} x/x$ para valores pequeños de $x$. Como estas tablas proporcionan generalmente las líneas trigonométricas en función del arco expresado en grados, bastará recordar (pág. 289) que la medida en grados $x$ está ligada con la medida en radianes mediante la relación $x = \pi/180\ y = 0{,}01745\ y$, con cinco cifras decimales. De una tabla que proporcione las líneas trigonométricas con cuatro cifras, se deduce:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10° | $x = 0{,}1745$ | $\operatorname{sen} x = 0{,}1736$ | $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0{,}9948$ |
| 5° | 0,0873 | 0,0872 | 0,9988 |
| 2° | 0,0349 | 0,0349 | 1,0000 |
| 1° | 0,0175 | 0,0175 | 1,0000 |

Aunque, según se ha dicho, estos valores únicamente tienen cuatro cifras decimales exactas, resulta que

$$\operatorname{sen} x/x \to 1 \quad \text{cuando} \quad x \to 0. \tag{1}$$

Daremos ahora una demostración rigurosa de esta relación límite. De la definición de las líneas trigonométricas en el círculo unidad, se deduce que si $x$ es la medida en radianes del ángulo $BOC$, para $0 < x < \pi/2$, se tiene:

Área del triángulo $OBC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} x$.

Área del sector circular $OBC = \frac{1}{2}\, x$ (véase página 290).

Área del triángulo $OBA = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x$.

Por tanto, $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$.

Dividiendo por $\operatorname{sen} x$, resulta:

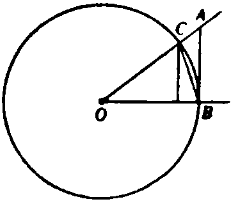


FIG. 169.

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x},$$

o

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1. \qquad [2]$$

Pero $1 - \cos x = (1 - \cos x)\dfrac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = (1 - \cos^2 x)/(1 + \cos x) =$ $= \operatorname{sen}^2 x/(1 + \cos x) < \operatorname{sen}^2 x$, y como $\operatorname{sen} x < x$, resulta que

$$1 - \cos x < x^2, \qquad [3]$$

o

$$1 - x^2 < \cos x.$$

Teniendo en cuenta [2], se obtiene definitivamente:

$$1 - x^2 < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1. \qquad [4]$$

Aunque hemos supuesto que $0 < x < \pi/2$, esta desigualdad es también válida para $-\pi/2 < x < 0$, ya que $\dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)} = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{-x} =$ $= \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, y $(-x)^2 = x^2$.

De [4] se deduce inmediatamente la relación [1], pues la diferencia entre $(\operatorname{sen} x)/x$ y 1 es menor que $x^2$, que puede hacerse menor que cualquier número positivo $\varepsilon$, por pequeño que sea, sin más que tomar $|x| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$.

**Ejercicios:**

1. De la desigualdad [3] dedúzcase la relación límite $(1 - \cos x)/x \to 0$, para $x \to 0$.

Determínense los límites, para $x \to 0$, de las siguientes funciones:

2. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$  3. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x(x-1)}$  4. $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$  5. $\dfrac{\operatorname{sen} ax}{x}$

6. $\dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$  7. $\dfrac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$  8. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, si $x$ está medido en grados.

9. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$  10. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$

**4. Límites para x $\to \infty$.**—Si la variable $x$ es suficientemente grande, la función $f(x) = 1/x$ se hace arbitrariamente pequeña o «tiende a cero». En efecto, el comportamiento de esta función al crecer $x$ es esencialmente el mismo que el de la sucesión $1/n$ al aumentar $n$. Daremos la definición general: *La función* f(x) *tiene el límite* a *cuando* x *tiende a infinito,* o *en símbolos*

$$f(x) \to a \qquad \text{para} \qquad x \to \infty,$$

*si en correspondencia con todo número positivo* $\varepsilon$, *por pequeño que sea, puede encontrarse otro, también positivo,* K *(que depende de* $\varepsilon$*), tal que* $|f(x) - a| < \varepsilon$, *siempre que sea* $|x| > K$. (Compárese ésta con la definición dada en las páginas 315, 316.)

En el caso de la función $f(x) = 1/x$, para la cual es $a = 0$, basta tomar $K = 1/\varepsilon$, como podrá verificar el lector inmediatamente.

**Ejercicios:**

1. Demuéstrese que la definición anterior de la afirmación

$$f(x) \to a \qquad \text{cuando} \qquad x \to \infty$$

equivale a esta otra:

$$f(x) \to a \qquad \text{cuando} \qquad 1/x \to 0.$$

Demuéstrense las siguientes relaciones límites:

2. $\dfrac{x+1}{x-1} \to 1$ cuando $x \to \infty$.

3. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1} \to 1$ cuando $x \to \infty$.

4. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \to 0$ cuando $x \to \infty$.

5. $\dfrac{x+1}{x^2+1} \to 0$ cuando $x \to \infty$.

6. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x + \cos x} \to 0$ cuando $x \to \infty$.

7. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ carece de límite para $x \to \infty$.

8. Defínase: «$f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$». Dése un ejemplo.

Existe una diferencia entre el caso de una función $f(x)$ y una sucesión $a_n$. En esta última, $n$ puede tender a infinito sólo aumentando, mientras que para una función, $x$ tiende a infinito positiva o negativamente. Si deseamos restringir nuestra atención al comportamiento de $f(x)$ cuando $x$ toma sólo valores *positivos* muy grandes, podemos reemplazar la condición $|x| > K$ por $x > K$, mientras que para valores negativos muy grandes de $x$, utilizaremos la condición $x < -K$. Para expresar simbólicamente estos dos métodos de aproximación *unilateral* a infinito, escribiremos

$$x \to +\infty \qquad x \to -\infty,$$

respectivamente.

## IV. DEFINICIÓN PRECISA DE CONTINUIDAD

Lo que dijimos en las páginas 294-97 equivale al siguiente criterio para reconocer la continuidad de una función: «Una función $f(x)$ es continua en el punto $x = x_1$ si, cuando $x$ tiende a $x_1$, $f(x)$ tiene como límite $f(x_1)$». Si analizamos esta definición, se ve que consiste en exigir dos cosas enteramente distintas:

*a)* Debe existir el límite $a$ de $f(x)$, cuando $x$ tiende a $x_1$.

*b)* Este límite $a$ debe ser igual al valor $f(x_1)$.

Si en la definición de límite (pág. 316) hacemos $a = f(x_1)$, la condición de continuidad adquiere la forma siguiente: *la función* f(x) *es*

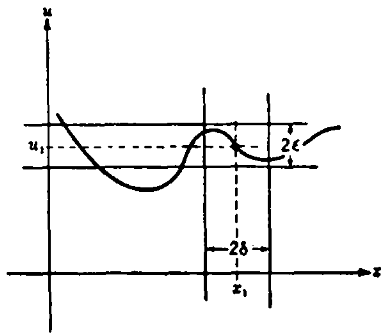


FIG. 170.—Función continua en $x = x_1$.

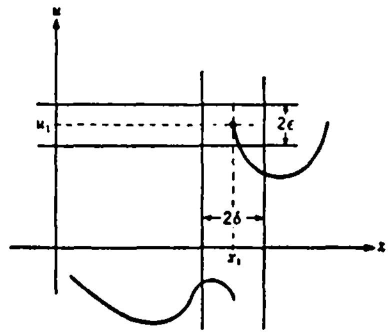


FIG. 171.—Función discontinua en $x = x_1$.

*continua para el valor* $x = x_1$ *si, para todo número positivo* $\varepsilon$, *por pequeño que sea, puede encontrarse otro* $\delta$, *también positivo (que depende de* $\varepsilon$*), tal que*

$$| f(x) - f(x_1) | < \varepsilon$$

*para todo* x *que satisfaga la desigualdad*

$$| x - x_1 | < \delta.$$

(La restricción $x \neq x_1$, impuesta en la definición de límite, es innecesaria aquí, puesto que la desigualdad $| f(x) - f(x_1) | < \varepsilon$ se satisface automáticamente.)

Como ejemplo, comprobemos la continuidad de la función $f(x)=x^3$, en el punto $x_1 = 0$. Se tiene

$$f(x_1) = 0^3 = 0.$$

Asignemos ahora a $\varepsilon$ cualquier valor positivo, p. ej., $\varepsilon = 1/1000$. Debemos demostrar ahora que si $x$ se mantiene suficientemente próximo a $x_1 = 0$, los valores correspondientes de $f(x)$ no diferirán de 0 más de 0,001; es decir, estarán situados entre $-0{,}001$ y $0{,}001$. Se ve inmediatamente que no salen de ese intervalo si se impone la condición de que los valores de $x$ difieran de $x_1=0$ en menos de $\delta = \sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$; pues si $|x| < 0{,}1$, se tiene que $|f(x)| = x^3 < 0{,}001$. De la misma forma, podemos reemplazar $\varepsilon = 0{,}001$ por $\varepsilon = 10^{-4}$, $10^{-5}$, o cualquier otro valor que deseemos. La condición quedará siempre satisfecha si se toma $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$, ya que si $|x| < \sqrt[3]{\varepsilon}$, $|f(x)| = x^3 < \varepsilon$.

Basándonos en la definición ($\varepsilon$, $\delta$) de la continuidad, es posible demostrar de manera análoga que los polinomios, las funciones racionales y las trigonométricas son funciones continuas, excepto para valores aislados de $x$, para los cuales la función puede hacerse infinita.

Teniendo en cuenta la gráfica de una función $u = f(x)$, la definición de continuidad toma la siguiente forma geométrica. Elíjase un número positivo $\varepsilon$ y trácense paralelas al eje de las $x$ a alturas $f(x_1) - \varepsilon$ y $f(x_1) + \varepsilon$ por encima de él. Entonces, deberá ser posible hallar un número positivo $\delta$, tal que todo el trozo de la gráfica que se encuentra dentro de la banda vertical de anchura $2\delta$ alrededor de $x_1$ esté contenido dentro de la banda horizontal de anchura $2\varepsilon$, alrededor de $f(x_1)$. En la figura 170 aparece una función que es continua en $x_1$, mientras que la figura 171 muestra una función que no lo es. En este último caso, por muy estrecha que sea la banda vertical alrededor de $x_1$, siempre incluirá una porción de la gráfica que queda fuera de la banda horizontal correspondiente a la elección de $\varepsilon$.

Si afirmo que una función dada $u = f(x)$ es continua para $x = x_1$, quiero decir que estoy dispuesto a convenir el siguiente contrato con el lector. Usted puede elegir cualquier número positivo $\varepsilon$, tan pequeño como desee, pero fijo. Entonces debo determinar otro número $\delta$, también positivo, tal que de $|x - x_1| < \delta$ se deduzca $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$. No me obligo a ofrecer desde el principio un número $\delta$ que sirva para cualquier $\varepsilon$ que usted subsiguientemente elija; *mi* elección de $\delta$ depende de la *suya* de $\varepsilon$. Si usted puede elegir un solo valor de $\varepsilon$ para el cual yo sea incapaz de proporcionar el correspondiente $\delta$, mi aserción queda al descubierto. De ahí que para demostrar que puedo cumplir el contrato, en cualquier caso concreto que se presente de una función $u = f(x)$, generalmente construyo una función positiva explícita

$$\delta = \varphi(\varepsilon)$$

que esté definida para todo número positivo $\varepsilon$, para el cual se pueda demostrar que de $|x - x_1| < \delta$ se deduce siempre $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$. En el caso de la función $u = f(x) = x^3$, para el valor $x_1 = 0$, la función $\delta = \varphi(\varepsilon)$ era $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

**Ejercicios:**

1. Demuéstrese que las funciones sen $x$ y cos $x$ son continuas.
2. Demuéstrese la continuidad de $1/(1 + x^4)$ y de $\sqrt{1 + x^2}$.

Parecerá ahora evidente que la definición ($\varepsilon$, $\delta$) de la continuidad coincide con lo que podría considerarse como el conjunto de los hechos observables respecto a una función. En esa forma, está de acuerdo con un principio general de la ciencia moderna según el cual el criterio de la utilidad de un concepto o la «existencia científica» de un fenómeno consiste (al menos en principio) en la posibilidad de su observación, o de su reducción a hechos observables.

## V. DOS TEOREMAS FUNDAMENTALES SOBRE LAS FUNCIONES CONTINUAS

**1. Teorema de Bolzano.**—Bernard Bolzano (1781-1848), un sacerdote católico, buen conocedor de la filosofía escolástica, fué uno de los primeros en introducir la moderna idea del rigor en el análisis matemático. Su importante opúsculo *Paradoxien des Unendlichen* apareció en 1850. Por primera vez se reconoció que, si han de utilizarse en toda su generalidad, pueden y deben demostrarse muchas proposiciones aparentemente evidentes, que se refieren a las funciones continuas. Un ejemplo lo constituye el siguiente teorema sobre funciones continuas de una variable. *Una función continua de una variable* x, *positiva para un cierto valor de* x *y negativa para otro, ambos pertenecientes a un intervalo de continuidad cerrado* a $\leqslant$ x $\leqslant$ b, *debe tomar el valor cero para algún valor intermedio de* x. Esto es, si $f(x)$ es continua, mientras $x$ varía de $a$ a $b$, siendo $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, debe existir un valor $\alpha$ de $x$ tal que $a < \alpha < b$ y $f(\alpha) = 0$.

El teorema de Bolzano corresponde perfectamente a nuestra idea intuitiva de una curva continua, la cual debe atravesar al eje $x$ para pasar de un punto situado por debajo de él a otro que se encuentra por encima. La figura 157 pone de manifiesto que esto puede *no* ser cierto para una función discontinua.

***2. Demostración del teorema de Bolzano.**—Daremos ahora una demostración rigurosa de este teorema. (Siguiendo a Gauss y a otros grandes matemáticos, podríamos aceptar y utilizar ese hecho sin demostración.) Nuestro propósito es el de reducir el teorema a las propiedades fundamentales del sistema numérico real, en particular al postulado de Dedekind-Cantor, el cual se refiere a los encajes de intervalos (pág. 77). Para ello, consideremos el intervalo $I$, $a \leqslant x \leqslant b$, en el cual está definida $f(x)$, que dividiremos en dos partes por su punto medio $x_1 = (a+b)/2$. Si resultase ser $f(x_1) = 0$, el teorema quedaría demostrado. Sin embargo, si $f(x_1) \neq$ $\neq 0$, $f(x_1)$ será mayor o menor que cero. En cualquiera de los dos casos, cada una de las dos mitades de $I$ gozará ahora de la misma propiedad: $f(x)$ tiene signo distinto en ambos extremos. Llamemos $I_1$ a este nuevo intervalo y repitamos el mismo proceso, dividiendo $I_1$ en dos partes iguales; será entonces $f(x) = 0$ en el punto medio de $I_1$, o, de lo contrario, podremos elegir un intervalo $I_2$, mitad del $I_1$, tal que $f(x)$ tenga signos distintos en ambos extremos. Repitiendo este procedimiento, después de un número finito de bisecciones encontraremos un punto para el cual $f(x) = 0$, o tendremos una sucesión de intervalos encajados $I_1, I_2, I_3, \cdots$ En este último caso, el postulado de Dedekind-Cantor asegura la existencia de un punto $\alpha$ en $I$, común a todos esos intervalos. Afirmamos que $f(\alpha) = 0$, por lo que $\alpha$ es el punto cuya existencia demuestra el teorema.

Hasta ahora no hemos utilizado la hipótesis inicial de la continuidad de la función. La usaremos ahora para completar la demostración mediante un breve razonamiento indirecto. Demostraremos que $f(\alpha) = 0$, suponiendo lo contrario y deduciendo una contradicción. Supongamos que $f(\alpha) \neq 0$; p. ej., $f(\alpha) = 2\varepsilon > 0$. Dado que $f(x)$ es continua, podremos encontrar un intervalo $J$ (tal vez muy pequeño) de amplitud $2\delta$, cuyo punto medio sea $\alpha$ y tal que en todo él el valor de

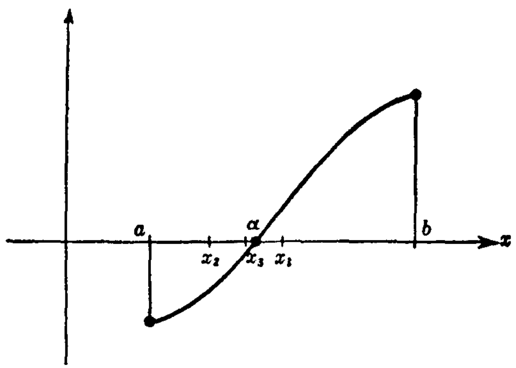


FIG. 172.—Teorema de Bolzano.

$f(x)$ difiera de $f(\alpha)$ en menos de $\varepsilon$. Ahora bien: como $f(\alpha) = 2\varepsilon$, podemos asegurar que $f(x) > \varepsilon$ en todo punto de $J$, por lo que también se verificará que $f(x) > 0$ en $J$. Pero como el intervalo $J$ es fijo, bastará tomar $n$ suficientemente grande para que el intervalo $I_n$ quede enteramente dentro de $J$, ya que la sucesión $I_n$ tiende a 0. Aquí aparece la contradicción, pues de la forma como se eligió $I_n$, resulta que la función $f(x)$ debe tener signos opuestos en los extremos de todo $I_n$, por lo que $f(x)$ tiene que tomar valores negativos en algún punto de $J$. El absurdo a que conduce suponer $f(\alpha) > 0$ o bien $f(\alpha) < 0$, demuestra que es $f(\alpha) = 0$.

**3. Teorema de Weierstrass sobre valores extremos.**—Karl Weierstrass (1815-1897) formuló otro hecho importante acerca de las funciones continuas, que parece también evidente para la intuición. Tal vez más que a ningún otro matemático se debe a Weierstrass la tendencia moderna hacia el rigor en el análisis matemático. El teorema aludido dice: *Si una función* f(x) *es continua en un intervalo* I, $a \leqslant x \leqslant b$, *incluídos los dos extremos* a *y* b *del intervalo, debe existir por lo menos un punto en* I, *donde* f(x) *alcanza su valor máximo* M, *y otro donde* f(x) *toma su valor mínimo* m. Intuitivamente, esto significa que la gráfica de la función $u = f(x)$ debe tener, por lo menos, un punto más alto y otro más bajo.

Importa hacer constar que el teorema puede no ser cierto si $f(x)$ deja de ser continua en los extremos del intervalo $I$; p. ej., la función $f(x) = 1/x$ no tiene un valor máximo en el intervalo $0 < x \leqslant 1$, aunque $f(x)$ es continua en el interior de dicho intervalo. Tampoco precisa una función discontinua tomar un valor máximo o mínimo, aunque esté acotada; p. ej., considérese la función, evidentemente discontinua, definida de la siguiente manera

$$f(x) = x \text{ para } x \text{ irracional,}$$
$$f(x) = {}^1/_2 \text{ para } x \text{ racional,}$$

en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$. Esta función toma siempre valores comprendidos entre 0 y 1, y precisamente tan próximos a 0 ó a 1 como queramos, si elegimos un valor irracional de $x$ suficientemente próximo a 0 ó a 1; pero $f(x)$ no puede ser nunca *igual* a 0 ó a 1, puesto que si $x$ es racional, se tiene $f(x) = {}^1/_2$, y para $x$ irracional, resulta $f(x) = x$, por lo que la función nunca alcanza los valores 0 ó 1.

*El teorema de Weierstrass se puede demostrar de modo análogo al seguido para el de Bolzano. Dividimos $I$ en dos semiintervalos cerrados $I'$ e $I''$, y fijamos nuestra atención sobre $I'$, como el intervalo donde debe buscarse el valor máximo de $f(x)$, *a menos que exista un punto* $\alpha$ *en* $I''$, *tal que* $f(\alpha)$ *exceda a cualquier valor de* $f(x)$ *en* $I'$; si así ocurriera, elegiríamos $I''$. Llamaremos $I_1$ al intervalo así elegido. Procedemos ahora con $I_1$ de igual forma que hicimos con $I$, obteniendo un intervalo $I_2$, etc. Mediante este proceso, se define una sucesión $I_1, I_2, I_3, \cdots, I_n, \cdots$, de intervalos encajados, que definen un punto $z$. Demostraremos que el valor $f(z) = M$ es el mayor que toma la función en $I$; esto es, tal que no puede existir un punto $s$ en $I$ para el cual $f(s) > M$. Supongamos que exista un punto $s$ tal que $f(s) = M + 2\varepsilon$, donde $\varepsilon$ es un número positivo (quizá muy pequeño). Alrededor de $z$ como centro, dado que $f(x)$ es continua, limitaremos un pequeño intervalo $K$, tal que $s$ quede fuera de él y que los valores que en $K$ tome $f(x)$ difieran de $f(z) = M$ en menos de $\varepsilon$, por lo que se tendrá ciertamente, en $K$, $f(x) < M + \varepsilon$. Pero, para un $n$ suficientemente grande, el intervalo $I_n$ queda dentro de $K$, y, por otra parte, se definió $I_n$ de tal manera que ningún valor de $f(x)$ para todo $x$ fuera de $I_n$ pudiera superar a los valores de $f(x)$ para los $x$ de $I_n$. Ya que $s$ está fuera de $I_n$, y $f(s) > M + \varepsilon$, mientras que en $K$ y, por consiguiente, en $I_n$, tenemos que $f(x) < M + \varepsilon$, hemos llegado a una contradicción.

De la misma manera puede demostrarse la existencia de un mínimo $m$, o puede deducirse directamente de lo que ha sido ya demostrado, puesto que el valor mínimo de $f(x)$ es el máximo de $g(x) = -f(x)$.

Puede probarse de manera idéntica el teorema de Weierstrass para funciones continuas de dos o más variables, $x, y, \cdots$ En lugar de un intervalo completo (con sus extremos), debemos considerar un dominio *cerrado*; es decir, un rectángulo en el plano $x, y$, en el que se incluye su frontera.

**Ejercicio:** ¿En qué parte de las demostraciones de los teoremas de Bolzano y Weierstrass se utilizó la hipótesis de que $f(x)$ estaba definida y era continua en todo el intervalo *cerrado* $a \leqslant x \leqslant b$, y no simplemente en $a < x \leqslant b$ ó $a < x < b$?

Las demostraciones de los teoremas de Bolzano y Weierstrass tienen un carácter decididamente no-constructivo. No proporcionan un método para encontrar realmente la situación de un cero o del valor máximo o mínimo de una función, con una precisión fijada de antemano, en un número finito de pasos. Se prueba tan sólo la mera existencia, o, mejor dicho, el absurdo de la no-existencia de los valores deseados. Éste es otro ejemplo importante contra el cual han protestado los «intuicionistas» (véase pág. 95); algunos de ellos han insistido en que dichos teoremas deben eliminarse de la matemática. El estudiante de matemática no ha de tomar todo esto más seriamente que la mayor parte de los críticos.

***4. Un teorema sobre sucesiones. Conjuntos compactos.**—Sea $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., una sucesión indefinida de números, distintos entre sí o no, contenidos todos en el *intervalo cerrado* $I$, $a \leqslant x \leqslant b$. La sucesión puede o no tender a un límite. En todo caso, *es siempre posible extraer otra sucesión* $y_1$, $y_2$, $y_3$, ..., *también indefinida, omitiendo ciertos términos de la dada, y tal que tienda a un límite* $y$, *contenido en el intervalo* $I$.

Para demostrar este teorema, dividimos el intervalo $I$ en dos intervalos cerrados $I'$ y $I''$, mediante el punto medio $(a+b)/2$ de $I$:

$$I' : a \leqslant x \leqslant \frac{a+b}{2},$$

$$I'' : \frac{a+b}{2} \leqslant x \leqslant b.$$

Por lo menos en uno de estos intervalos, que llamaremos $I_1$, se encontrarán infinitos términos $x_n$ de la sucesión original. Elijamos cualquiera de ellos, $x_n$, y llamémosle $y_1$. Procedamos ahora de la misma manera con el intervalo $I_1$. Puesto que existen infinitos términos $x_n$ en $I_1$, deberán existir también infinitos en una al menos de las mitades de $I_1$, que llamaremos $I_2$. Por tanto, podremos determinar ciertamente un término $x_n$ de $I_2$ para el cual $n > n_1$. Elijamos uno entre ellos y llamémosle $y_2$. Procediendo de esta manera, encontraremos una sucesión de intervalos encajados, $I_1$, $I_2$, $I_3$, ..., y una sucesión parcial $y_1$, $y_2$, $y_3$, ..., de la primitiva, tal que $y_n$ se encuentre en $I_n$ para todo $n$. Este encaje de intervalos define un punto $y$ de $I$, y resulta evidente que la sucesión $y_1$, $y_2$, $y_3$, ..., tiene el límite $a$, como se quería demostrar.

*Estas consideraciones son susceptibles de ser generalizadas en una forma que es típica de la matemática moderna. Consideremos una variable $X$ que se extiende por un conjunto general $S$, en el cual se ha definido la noción de «distancia» de alguna manera. $S$ puede ser un conjunto de puntos en un plano o en el espacio. Pero esto no es necesario; p. ej., $S$ puede ser el conjunto de todos los triángulos del plano. Si $X$ e $Y$ son dos de esos triángulos, de vértices $A$, $B$, $C$, y $A'$. $B'$, $C'$, respectivamente, podemos definir la «distancia» entre ambos triángulos mediante el número

$$d(X, Y) = AA' + BB' + CC',$$

donde $AA'$, etc., denota lo que se entiende comúnmente por distancia entre los puntos $A$ y $A'$. En cualquier conjunto $S$, en el que esté definida la noción de «distancia», podemos definir también el concepto de sucesión de elementos $X_1$, $X_2$, $X_3$, $\cdots$, que tienden a un elemento límite $X$ de $S$. Con ello queremos significar que $d(X, X_n) \to 0$, cuando $n$ tiende a $\infty$.

Diremos ahora que *el conjunto* S *es compacto si de una sucesión cualquiera de elementos* $X_1$, $X_2$, $X_3$, $\cdots$, *de* S, *podemos extraer siempre otra sucesión parcial que tiende a un elemento límite* X *de* S. En el párrafo precedente se ha demostrado que, en este sentido, un intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant b$ es un conjunto compacto. De ahí que el concepto de conjunto compacto pueda considerarse como una generalización del de *intervalo cerrado* de la recta numérica. Obsérvese que la recta numérica *en su totalidad* no es un conjunto compacto, puesto que la sucesión de números enteros, 1, 2, 3, 4, 5, $\cdots$, ni tiende a un límite, ni contiene una sucesión parcial convergente. Tampoco un intervalo abierto, sin incluir sus extremos, tal como $0 < x < 1$, es compacto, puesto que la sucesión $1/2$, $1/3$, $1/4$, $\cdots$, o cualquier sucesión parcial de la misma, tiende al límite cero, el cual no es un punto del intervalo abierto. Del mismo modo puede demostrarse que la región del plano formada por los puntos interiores a un cuadrado o rectángulo no es un conjunto compacto, aunque sí lo es cuando se añaden los puntos frontera. Por otra parte, el conjunto de todos los triángulos cuyos vértices son interiores o están sobre la circunferencia de un círculo dado es compacto.

Es también posible generalizar la noción de continuidad al caso en que la variable $X$ varíe en un conjunto cualquiera $S$, en el cual se ha definido la noción de límite. La función $u = F(X)$, donde $u$ es un número real, se dice que es continua en el elemento $X$ si, para cualquier sucesión de elementos $X_1$, $X_2$, $X_3, \cdots$, que converja hacia $X$, la sucesión correspondiente de números $F(X_1)$, $F(X_2), \cdots$, tiende al límite $F(X)$. (Podría también darse una definición ($\varepsilon$, $\delta$) equivalente.) Es inmediato demostrar que el teorema de Weierstrass se verifica también en el caso general de una función continua definida para los elementos de un conjunto compacto cualquiera:

*Si es* u = F(X) *una función continua cualquiera, definida en un conjunto compacto* S, *existe siempre un elemento de* S *para el cual* F(X) *alcanza su valor máximo, y también otro en el cual toma su valor mínimo.*

La demostración resulta sencilla una vez asimilados perfectamente los conceptos generales que figuran en el enunciado, pero no proseguiremos en la discusión de este tema. Según se verá en el capítulo VII, el teorema general de Weierstrass es de suma importancia en la teoría de los máximos y mínimos.

## VI. ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DE BOLZANO

**1. Aplicaciones geométricas.**—El sencillo, aunque general, teorema de Bolzano puede utilizarse para demostrar múltiples proposiciones que en modo alguno resultan obvias a primera vista. Comencemos con la siguiente: *Si* A *y* B *son dos áreas del plano, existe siempre una recta del mismo que simultáneamente divide en dos partes iguales a* A *y a* B. Por un «área» queremos significar una porción cualquiera del plano encerrada por un contorno simple cerrado.

Comencemos por elegir un punto fijo $P$ del plano y tracemos por $P$ una semirrecta $PR$, a partir de la cual mediremos los ángulos. Si tomamos un rayo $PS$, que forme un ángulo $x$ con $PR$, existirá en el plano una recta paralela a $PS$ que *dividirá en dos partes iguales el área* A. Pues si consideramos una recta $l_1$ paralela a $PS$ y situada por completo de un mismo lado de $A$, trasladándola hasta la posición $l_2$ (véase Fig. 173), al otro lado de $A$, la función cuyo valor sea la parte del área $A$ situada a la derecha de la recta, menos el área de $A$ situada a su izquierda, será positiva para la posición $l_1$ y negativa para la posición $l_2$. Puesto que esta función es continua, por el teorema de Bolzano debe anularse para alguna posición intermedia $l_x$, la cual, en consecuencia, dividirá $A$ en dos partes iguales. Para cada valor de $x$ desde $x = 0^{\circ}$ hasta $x = 360^{\circ}$, la recta $l_x$, que divide a $A$ en dos partes iguales, está definida unívocamente.

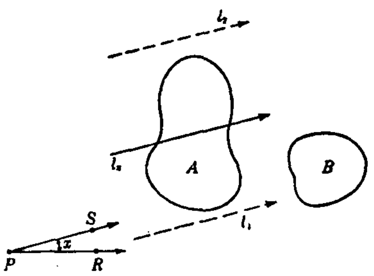

FIG. 173.—División simultánea de dos áreas en partes iguales.

Defínase ahora la función $y = f(x)$ como el área de $B$ a la derecha de $l_x$, menos el área de $B$ a la izquierda de $l_x$. Supongamos que la recta $l_0$, que divide a $A$ en dos partes iguales y tiene la dirección de $PR$, corta a $B$ de tal manera que deja a la derecha un trozo mayor que a la izquierda. Entonces, para $x = 0^{\circ}$, $y$ será positiva. Si $x$ aumenta hasta $180^{\circ}$, la recta $l_{180}$, cuya dirección coincide con la de $RP$, que divide a $A$ en dos partes iguales, es la misma que $l_0$; pero tiene sentido contrario, por estar intercambiadas la izquierda y la derecha, de donde se deduce que, numéricamente, el valor de $y$ para $x = 180^{\circ}$ es igual que para $x = 0^{\circ}$, aunque de signo opuesto, es decir, negativo. Dado que $y$ es una función continua de $x$, mientras $l_x$ efectúa una vuelta completa existe algún valor $\alpha$ de $x$ comprendido entre 0° y 180°, para el cual $y$ se anula. Sigue de ello que la recta $l_\alpha$ divide a $A$ y $B$ simultáneamente en partes iguales, como se quería demostrar.

Obsérvese que, aunque hemos demostrado la *existencia* de una recta que goza de la propiedad enunciada, no hemos dado ningún procedimiento definido para *construirla*. Aparece una vez más este rasgo característico de las demostraciones matemáticas de existencia, en oposición a las construcciones.

Un problema análogo es el siguiente: dado un dominio plano, se desea cortarlo en *cuatro* partes iguales, mediante dos rectas *perpendiculares*. Para demostrar que esto es siempre posible, volvamos al

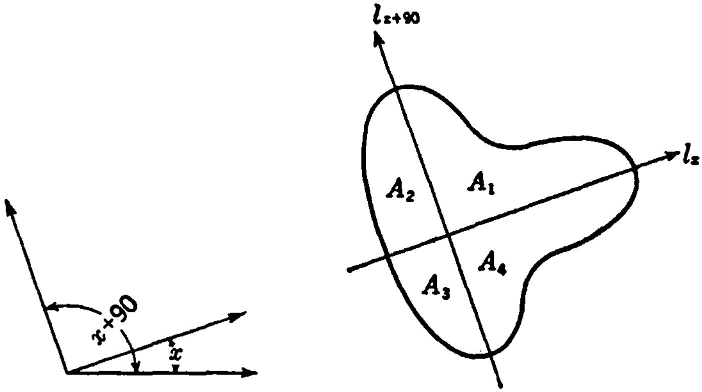


FIG. 174.

problema anterior y precisamente a aquella parte de la demostración donde definimos $l_x$ para cualquier ángulo $x$; pero prescindamos por completo del área $B$. En lugar de esto, tracemos la recta $l_{x+90}$, que es perpendicular a $l_x$ y que también divide a $A$ en dos partes iguales. Si numeramos las cuatro partes de $A$, como indica la figura 174, tendremos

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4$$

y

$$A_2 + A_3 = A_1 + A_4,$$

de donde, restando la segunda igualdad de la primera, resulta:

$$A_1 - A_3 = A_3 - A_1;$$

es decir,

$$A_1 = A_3,$$

y, por tanto,

$$A_2 = A_4.$$

Así, pues, si podemos demostrar que existe un ángulo $\alpha$ tal que para $l_\alpha$ sea

$$A_1(\alpha) = A_2(\alpha),$$

nuestro teorema quedará demostrado, ya que para tal ángulo las cuatro partes serán iguales. Con este propósito, definimos una función $y = f(x)$ trazando una recta $l_x$ y haciendo $f(x) = A_1(x) - A_2(x)$.

Para $x = 0^\circ$, $f(0) = A_1(0) - A_2(0)$ puede ser positiva. En ese caso, para $x = 90^\circ$, $f(90) = A_1(90) - A_2(90) = A_2(0) - A_3(0) = A_2(0) - A_1(0)$, será negativa. En consecuencia, ya que $f(x)$ varía de una manera continua, cuando $x$ pasa de $0^\circ$ a $90^\circ$ existirá un cierto valor $\alpha$ entre $0^\circ$ y $90^\circ$, para el cual $f(\alpha) = A_1(\alpha) - A_2(\alpha) = 0$. Entonces, la recta $l_\alpha$ y su perpendicular $l_{\alpha+90}$ dividirán al dominio en cuatro partes iguales.

Es interesante observar que estos problemas se pueden generalizar al caso de tres o más dimensiones. En tres dimensiones, el problema se enuncia así: Dados tres sólidos en el espacio, encontrar un plano que los divida simultáneamente en partes iguales. Se puede demostrar, partiendo del teorema de Bolzano, que esto es siempre posible. Para más de tres dimensiones el teorema sigue siendo válido, pero la demostración requiere recursos de orden más elevado.

***2. Aplicación a un problema de mecánica.**—Terminaremos este capítulo discutiendo un problema de mecánica, aparentemente difícil, pero que es sencillo de resolver por un razonamiento basado en los conceptos de continuidad. (Este problema fué sugerido por H. Whitney.)

Supongamos un tren que recorre un trayecto rectilíneo de vía entre las estaciones $A$ y $B$. No es preciso que el móvil tenga velocidad o aceleración uniformes durante el recorrido; el tren puede acelerarse, retardarse, detenerse y aun retroceder durante algún tiempo antes de alcanzar $B$. Pero se supone conocido de antemano el movimiento exacto del tren; es decir, se supone dada la función $s = f(t)$, donde $s$ es la distancia del tren a la estación $A$ y $t$ el tiempo, medido a partir del instante de salida. Sobre el suelo de uno de los vagones hay una varilla conectada de forma que puede moverse sin rozamiento, hacia delante o hacia atrás, hasta tocar el suelo. Si llega a tocar el suelo, supondremos que permanece en esta posición definitivamente. Nos preguntamos si es posible colocar la varilla de tal manera que si se abandona en el momento en que el tren inicia su movimiento, quedando entonces exclusivamente sujeta a la influencia de la gravedad y del movimiento del tren, no caiga al suelo durante todo el trayecto desde $A$ hasta $B$. Podrá parecer sumamente improbable que, para cualquier ley de movimiento, dada la acción conjunta de la gravedad y de las fuerzas de reacción, sea siempre posible el mantenimiento de dicho equilibrio con la única condición de elegir convenientemente la posición inicial de la varilla; con todo, nuestra afirmación es que dicha posición existe siempre.

Por paradójica que esta aserción parezca a primera vista, puede demostrarse fácilmente si nos concentramos en su carácter esencialmente topológico. No se precisa para ello de un conocimiento detallado de las leyes de la dinámica y sólo es necesario suponer realizada la siguiente hipótesis de naturaleza física: *El movimiento de la varilla depende con continuidad de su posición inicial.* Caractericemos la posición inicial de la varilla por el ángulo $x$, que forma inicialmente con el suelo del vagón, y por el ángulo $y$, que forma con dicho suelo al

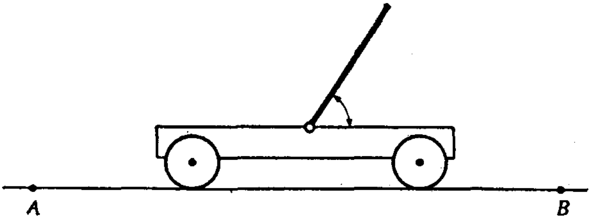


FIG. 175.

final del trayecto, cuando el tren llega al punto $B$. Si la varilla ha caído al suelo, o bien es $y = 0$ ó $y = \pi$. Para una posición inicial dada $x$, la posición final $y$ estará, de acuerdo con nuestra hipótesis, unívocamente determinada mediante una función $y = g(x)$, que es continua y toma los valores $y = 0$ para $x = 0$ e $y = \pi$ para $x = \pi$ (esto último expresa, simplemente, que la varilla permanecerá sobre el suelo si ésta es su posición al iniciar el viaje). Recordemos que por ser $g(x)$ una función continua en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi$, toma todos los valores entre $g(0) = 0$ y $g(\pi) = \pi$; en consecuencia, para cualquier valor de $y$, p. ej., para $y = \pi/2$, existe un valor determinado de $x$ tal que $g(x) = y$. En particular, existirá una posición inicial para la cual la posición final de la varilla en $B$ será perpendicular al suelo. (NOTA: No debe olvidarse en este razonamiento que el movimiento del tren está dado de antemano.)

Es evidente que la argumentación es por completo teórica; si el viaje es de larga duración o si la ley de movimiento del tren, expresada por $s = f(t)$, es muy arbitraria, entonces el número de posiciones iniciales $x$ para las que la posición final $g(x)$ es distinta de 0 o de $\pi$

será muy pequeño, como sabe cualquiera que haya intentado mantener verticalmente una aguja sobre una superficie plana durante un tiempo apreciable. Con todo, nuestro razonamiento será apreciado incluso por una mentalidad práctica, pues pone de manifiesto la posibilidad de obtener resultados cualitativos en dinámica por simple razonamiento, sin recurrir a una manipulación experimental.

**Ejercicios:**

1. Utilizando el teorema de la página 326, demuéstrese que es posible generalizar el razonamiento anterior para el caso de un viaje de duración infinita.
2. Generalícese para el caso en que el tren se mueve siguiendo una curva plana cualquiera y la varilla puede caer en cualquier dirección. Obsérvese que no es posible representar un disco circular sobre una circunferencia exclusivamente mediante una transformación continua que deje fijo todo punto de la circunferencia (véase pág. 267).
3. Demuéstrese que el tiempo que precisa la varilla para caer al suelo, si el movimiento del tren es estacionario y la varilla se aparta un ángulo $\varepsilon$ de la posición vertical, tiende a infinito al tender $\varepsilon$ a cero.

## SUPLEMENTO AL CAPÍTULO VI

# MÁS EJEMPLOS SOBRE LÍMITES Y CONTINUIDAD

### I. EJEMPLOS DE LÍMITES

**1. Observaciones generales.**—En muchos casos, puede demostrarse la convergencia de una sucesión $a_n$ mediante el recurso de hallar otras dos sucesiones $b_n$ y $c_n$, cuyos términos tengan una estructura más sencilla que los de la primera y tales que

$$b_n \leqslant a_n \leqslant c_n \qquad [1]$$

para todo $n$. *Entonces, podemos demostrar que si las sucesiones* $b_n$ *y* $c_n$ *convergen ambas hacia el mismo límite* $\alpha$, *también* $a_n$ *tiende a dicho límite* $\alpha$. Queda a cargo del lector la demostración formal de esta afirmación.

Es evidente que al aplicar este procedimiento, deberán utilizarse desigualdades; en consecuencia, conviene recordar algunas reglas elementales que rigen las operaciones aritméticas con desigualdades.

1. Si $a > b$, es $a + c > b + c$. (Puede sumarse cualquier número a los dos miembros de una desigualdad.)
2. Si $a > b$ y el número $c$ es *positivo*, se tiene $ac > bc$. (Puede multiplicarse una desigualdad por cualquier número positivo.)
3. Si $a < b$, es $-b < -a$. (Se invierte el sentido de una desigualdad multiplicándola por $-1$.) Así, de $2 < 3$, resulta $-3 < -2$.
4. Si $a$ y $b$ tienen el mismo signo, y es $a < b$, resulta $1/a > 1/b$.
5. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

**2. Límite de $q^n$.**—Si $q$ es un número mayor que 1, la sucesión $q^n$ llegará a exceder a cualquier número, como lo hace la siguiente: 2, $2^2$, $2^3$, ..., en la cual es $q = 2$; la sucesión «tiende a infinito» (véase página 305). En el caso general, la demostración se basa en la importante desigualdad (demostrada en la pág. 22)

$$(1 + h)^n \geqslant 1 + nh > nh, \qquad [2]$$

donde $h$ es un número positivo cualquiera. Hagamos $q = 1 + h$, siendo $h > 0$. Se tiene entonces

$$q^n = (1 + h)^n > nh.$$

Si $k$ es un número positivo cualquiera, por grande que sea, para todo $n > k/h$ se deduce que

$$q^n > nh > k,$$

de donde resulta que $q^n \to \infty$.

Si $q = 1$, todos los términos de la sucesión $q^n$ serán iguales a 1, y éste es también el límite de la sucesión. Si $q$ es negativo, $q^n$ tomará alternativamente valores positivos y negativos, y no tendrá límite si $q \leqslant -1$.

**Ejercicio:** Dése una demostración rigurosa de esta última afirmación.

En la página 73 demostramos que $q^n \to 0$ si es $-1 < q < 1$. Podemos dar otra demostración muy sencilla de ese hecho. Consideraremos primero el caso $0 < q < 1$; los números $q$, $q^2$, $q^3$, ... forman una sucesión monótona decreciente, acotada inferiormente por 0. De acuerdo con lo dicho en la página 306, la sucesión debe tender a un límite: $q^n \to a$. Multiplicando ambos miembros de esa relación por $q$ se tiene: $q^{n+1} \to aq$.

Pero $q^{n+1}$ debe tener el mismo límite, ya que no importa que el exponente sea $n$ o $n+1$; luego $aq = a$, o sea $a(q-1) = 0$. Puesto que $1 - q \neq 0$ esa igualdad implica que $a = 0$.

Si $q = 0$, la afirmación $q^n \to 0$ es trivial. Si $-1 < q < 0$, se tiene $0 < |q| < 1$, de donde se sigue que $|q^n| = |q|^n \to 0$, de acuerdo con el razonamiento anterior. De todo ello resulta que se tiene siempre $q^n \to 0$ para $|q| < 1$, con lo que queda completada la demostración.

**Ejercicios:** Demuéstrese que para $n \to \infty$:

1. $[x^2/(1 + x^2)]^n \to 0$.
2. $[x/(1 + x^2)]^n \to 0$.
3. $[x^3/(4 + x^2)]^n$ tiende a infinito para $x > 2$ y a cero para $|x| < 2$.

**3. Límite de $\sqrt[n]{p}$.**—La sucesión $a_n = \sqrt[n]{p}$, es decir, la sucesión $p$, $\sqrt{p}$, $\sqrt[3]{p}$, $\sqrt[4]{p}$, ... tiene el límite 1 para todo número positivo fijo $p$:

$$\sqrt[n]{p} \to 1 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \qquad [3]$$

(Mediante el símbolo $\sqrt[n]{p}$ representamos, como de costumbre, la raíz enésima positiva. Para los números $p$ negativos no existen raíces enésimas reales, si $n$ es par.)

Para demostrar la relación [3], comencemos por suponer que $p > 1$; entonces, $\sqrt[n]{p}$ será también mayor que 1, por lo que podemos escribir:

$$\sqrt[n]{p} = 1 + h_n,$$

donde $h_n$ es un número positivo que depende de $n$. De acuerdo con la desigualdad [2] resulta que

$$p = (1 + h_n)^n > nh_n .$$

Al dividir por $n$, vemos que

$$0 < h_n < p/n .$$

Puesto que las sucesiones $b_n = 0$ y $c_n = p/n$ tienen ambas el límite 0, de lo dicho en la página 333 se sigue que $h_n$ también tiene límite 0, con lo que nuestra afirmación queda demostrada para $p > 1$. Éste es un ejemplo típico de un método de determinación de límites, que consiste en encerrar la sucesión problema entre otras dos, cuyos límites son conocidos o más fáciles de obtener.

Incidentalmente, hemos deducido una estimación de la diferencia $h_n$, entre $\sqrt[n]{p}$ y 1, encontrando que ésta es siempre menor que $p/n$.

Si $0 < p < 1$, entonces $\sqrt[n]{p} < 1$, por lo que podemos escribir:

$$\sqrt[n]{p} = \frac{1}{1 + h_n},$$

donde $h_n$ representa de nuevo un número positivo que depende de $n$. De ello se deduce que

$$p = \frac{1}{(1 + h_n)^n} < \frac{1}{nh_n};$$

esto es,

$$0 < h_n < \frac{1}{np}$$

De esta última relación concluímos que $h_n$ tiende a cero al crecer $n$; pero, dado que $\sqrt[n]{p} = 1/(1 + h_n)$, resulta que $\sqrt[n]{p} \to 1$.

El efecto nivelador de la extracción de la raíz enésima, que hace tender hacia 1 a cualquier número, al aumentar $n$, es incluso eficaz aun cuando la cantidad bajo el signo radical no permanezca constante. Vamos a demostrar que la sucesión: 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, ...,.tiende a 1; es decir, que

$$\sqrt[n]{n} \to 1$$

al tender $n$ a infinito. Es posible también deducir este caso por aplicación de la desigualdad [2]. En lugar de tomar la raíz $n$-ésima de $n$, tomemos la raíz $n$-ésima de $\sqrt{n}$. Si escribimos $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + k_n$, siendo $k_n$ un número positivo que depende de $n$, esta desigualdad nos proporciona $\sqrt{n} = (1 + k_n)^n > nk_n$; por lo que

$$k_n < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

De donde resulta

$$1 < \sqrt[n]{n} = (1 + k_n)^2 = 1 + 2k_n + k_n^2 < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

El segundo miembro de esta desigualdad tiende a 1, al crecer $n$, por lo que $\sqrt[n]{n}$ debe tender también a 1.

**4. Las funciones discontinuas como límites de funciones continuas.**—Podemos considerar límites de sucesiones $a_n$ cuyos términos no sean constantes, sino dependientes de una variable $x$; p. ej., $a_n = f_n(x)$. Si esta sucesión converge cuando $n \to \infty$, el límite será a su vez una función de $x$,

$$f(x) = \text{lím}\, f_n(x).$$

Estas representaciones de ciertas funciones $f(x)$ como límites de otras son, a menudo, muy útiles para reducir funciones «superiores» $f(x)$ a las funciones elementales $f_n(x)$.

Esto es cierto, en particular, en la representación de las funciones discontinuas mediante fórmulas explícitas. Consideremos, p. ej., la sucesión $f_n(x) = 1/(1 + x^{2n})$. Para $|x| = 1$, tenemos $x^{2n} = 1$ y, en consecuencia, $f_n(x) = {}^1/_2$, cualquiera que sea $n$, de donde resulta $f_n(x) \to {}^1/_2$. Para $|x| < 1$, se tiene que $x^{2n} \to 0$, o sea que $f_n(x) \to 1$, mientras que para $|x| > 1$ tenemos $x^{2n} \to \infty$, de donde se deduce que $f_n(x) \to 0$. En resumen,

$$f(x) = \text{lím}\, \frac{1}{1 + x^{2n}} = \begin{cases} 1 & \text{para } |x| < 1, \\ 1/2 & \text{para } |x| = 1, \\ 0 & \text{para } |x| > 1. \end{cases}$$

En este caso la función discontinua $f(x)$ está representada como el límite de una sucesión de funciones racionales continuas.

Otro ejemplo interesante de carácter análogo es el de la sucesión

$$f_n(x) = x^2 + \frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(1 + x^2)^n}$$

Para $x = 0$ todos los valores de $f_n(x)$ son cero, luego $f(0) = \text{lím}\, f_n(0) = 0$. Para $x \neq 0$, la expresión $1/(1 + x^2) = q$ es positiva y menor que 1; las propiedades conocidas de la serie geométrica nos permiten asegurar la convergencia de $f_n(x)$ para $n \to \infty$. El límite, es decir, la suma de la progresión geométrica indefinidamente prolongada es: $\dfrac{x^2}{1-q} = \dfrac{x^2}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$. Se ve así que $f_n(x)$ tiende a la función $f(x) = 1 + x^2$ para $x \neq 0$ y a $f(x) = 0$ para $x = 0$. Esta función tiene una discontinuidad evitable para $x = 0$.

***5. Límites por iteración.**—Con frecuencia, los términos de una sucesión son de tal naturaleza que se deduce $a_{n+1}$ de $a_n$ mediante el mismo procedimiento por el cual se calculó $a_n$ a partir de $a_{n-1}$; repitiendo el proceso indefinidamente, se obtiene toda la sucesión partiendo de un término inicial dado. En tales casos, decimos que se trata de un proceso de «iteración».

Por ejemplo, la sucesión

$$1, \sqrt{1+1}, \sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}, \cdots$$

tiene una ley de formación de ese tipo; cada término posterior al primero se forma extrayendo la raíz cuadrada de 1 más el que le precede. Así, la fórmula

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$$

define toda la sucesión. Calculemos su límite: evidentemente, $a_n$ es mayor que 1 para $n > 1$; además, $a_n$ es una sucesión monótona creciente, pues

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (1 + a_n) - (1 + a_{n-1}) = a_n - a_{n-1}.$$

De aquí resulta que si es $a_n > a_{n-1}$, será también $a_{n+1} > a_n$; pero sabemos que $a_2 - a_1 = \sqrt{2} - 1 > 0$, de donde deducimos por inducción que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n$; es decir, que la sucesión es monótona creciente. Además, está acotada, pues de lo anterior resulta:

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{a_{n+1}} < \frac{1 + a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{a_{n+1}} < 2.$$

Por el principio de las sucesiones monótonas deducimos que, para $n \to \infty$, $a_n \to a$, siendo $a$ un número comprendido entre 2 y 1. Es fácil ver que $a$ es la raíz positiva de la ecuación $x^2 = 1 + x$, pues, para $n \to \infty$, la ecuación $a_{n+1}^2 = 1 + a_n$ se convierte en $a^2 = 1 + a$. Resolviéndola, se encuentra que la raíz positiva es $a = (1 + \sqrt{5})/2$. Podríamos resolver esta ecuación mediante un proceso de iteración, lo que nos proporcionaría el valor de la raíz con cualquier grado de aproximación deseado, siempre que se avanzase lo suficiente en dicho proceso.

Es posible resolver muchas otras ecuaciones algebraicas por procedimientos análogos de iteración; p. ej., podemos escribir la ecuación cúbica $x^3 - 3x + 1 = 0$ de la siguiente manera:

$$x = \frac{1}{3 - x^2}$$

Si elegimos ahora un valor cualquiera para $a_1$, p. ej., $a_1 = 0$, y ponemos:

$$a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n^2},$$

obtendremos la sucesión: $a_2 = 1/3 = 0{,}3333...$; $a_3 = 9/26 = 0{,}3461$ ...; $a_4 = 676/1947 = 0{,}3472$ ..., etc. Puede demostrarse que la sucesión $a_n$, obtenida de esta forma, converge hacia el límite $a = 0{,}3473...$, que es una solución de la ecuación cúbica dada. Estos procesos de iteración tienen una gran importancia, tanto en la matemática pura, donde proporcionan «demostraciones de existencia», como en la aplicada, en cuyo caso suministran métodos aproximados para la resolución de muy distintas clases de problemas.

**Ejercicios sobre límites.** Para $n \to \infty$:

1. Demuéstrese que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$. (Escríbase la diferencia en la forma

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).)$$

2. Determínese el límite de $\sqrt{n^2 + a} - \sqrt{n^2 + b}$.
3. Hállese el límite de $\sqrt{n^2 + an + b} - n$.
4. Calcúlese el límite de $\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$
5. Demuéstrese que el límite de $\sqrt[n]{n+1}$ es 1.
6. ¿Cuál es el límite de $\sqrt[n]{a^n + b^n}$ si $a > b > 0$?
7. ¿Cuál es el límite de $\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ si $a > b > c > 0$?
8. Más adelante veremos (pág. 459) que $e = \text{lím}\, [1 + (1/n)]^n$. ¿Cuál será entonces el límite de $(1 + 1/n^2)^n$?

## II. UN EJEMPLO SOBRE CONTINUIDAD

La demostración rigurosa de la continuidad de una función requiere la comprobación explícita de la definición dada en la página 321. A veces esto entraña un procedimiento muy lento, si bien, afortunadamente como veremos en el capítulo VIII, la continuidad es una consecuencia de la diferenciabilidad. Ya que esta última propiedad se establecerá sistemáticamente para todas las funciones elementales, podemos seguir el procedimiento habitual de omitir las demostraciones enojosas de la continuidad en cada caso particular. Pero, como un ejemplo aclaratorio de la definición general, analizaremos otro caso: la función $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Podemos restringir la variación de $x$ a un intervalo prefijado $|x| \leqslant M$, siendo $M$ un número arbitrariamente elegido. Si escribimos

$$f(x_1) - f(x) = \frac{1}{1 + x_1^2} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{x^2 - x_1^2}{(1 + x^2)(1 + x_1^2)} =$$
$$= (x - x_1)\frac{(x + x_1)}{(1 + x^2)(1 + x_1^2)},$$

encontramos que para $|x| \leqslant M$ y $|x_1| \leqslant M$

$$|f(x_1) - f(x)| \leqslant |x - x_1||x + x_1| \leqslant |x - x_1| \cdot 2M,$$

de donde se deduce claramente que el primer miembro será menor que cualquier número positivo $\varepsilon$, con tal que $|x_1 - x| < \delta = \varepsilon/2M$.

Deberá observarse que hemos sido muy generosos en nuestras apreciaciones. Para valores mayores de $x$ y $x_1$, el lector podrá ver por sí mismo que hubiera bastado tomar un $\delta$ mucho mayor.