CAPÍTULO IV

GEOMETRÍA PROYECTIVA. AXIOMÁTICA. GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS

I. INTRODUCCIÓN

1. Clasificación de las propiedades geométricas. Invariancia respecto a las transformaciones.—La geometría se ocupa de las propiedades de las figuras del plano o del espacio. Estas propiedades son tan numerosas y variadas, que es necesario algún principio de clasificación para poner orden en esta riqueza de conocimientos. Se puede, p. ej., introducir una clasificación basada en el método utilizado para deducir los teoremas. Desde este punto de vista, se hace usualmente una distinción entre procedimientos «sintéticos» y «analíticos». El primero de éstos es el método axiomático clásico de Euclides, en el cual el edificio se construye sobre fundamentos puramente geométricos, independientes del álgebra y del concepto de continuo numérico, y los teoremas se deducen por razonamiento lógico de un conjunto inicial de proposiciones llamadas axiomas o postulados. El segundo método se basa en la introducción de coordenadas numéricas, y utiliza la técnica del álgebra. Este método ha originado un cambio profundo en la ciencia matemática, del que ha resultado la unificación de la geometría, el análisis y el álgebra en un sistema orgánico.

En este capítulo, la clasificación según el método será menos importante que la hecha de acuerdo con el *contenido*, basada en el carácter de los propios teoremas, e independiente de los métodos usados para demostrarlos. En geometría plana elemental se distingue entre teoremas que tratan de la congruencia de figuras y utilizan los conceptos de longitud y ángulo, y teoremas que se refieren a la semejanza de figuras, y que sólo utilizan el concepto de ángulo. Esta distinción particular no es muy importante, ya que longitud y ángulo están relacionados tan íntimamente que más bien resulta artificial separarlos. (Es el estudio de esta relación lo que constituye la mayor parte del contenido de la trigonometría.) En lugar de ello, podemos decir que los teoremas de la geometría elemental se ocupan de *magnitudes*: longitudes, medidas de ángulos, y áreas. Dos figuras son equivalentes, desde este punto de vista, si son *congruentes*, es decir, si una puede obtenerse de la otra mediante un *movimiento rígido*, en el cual sólo cambia la posición, pero no la magnitud. Surge ahora la cuestión de si el concepto de magnitud y los de congruencia y semejanza, relacionados con él, son esenciales en geometría, o si las figuras geométricas pueden tener aún otras propiedades más profundas, que subsistan después de transformaciones más drásticas que los movimientos rígidos. Vamos a ver que así acontece.

Supongamos que se dibuja una circunferencia y un par de diámetros perpendiculares en un trozo rectangular de madera blanda, como indica la figura 69. Si colocamos el trozo entre las mordazas de un potente tornillo de banco y lo comprimimos hasta que tenga la mitad de su ancho original, el círculo se habrá transformado en una

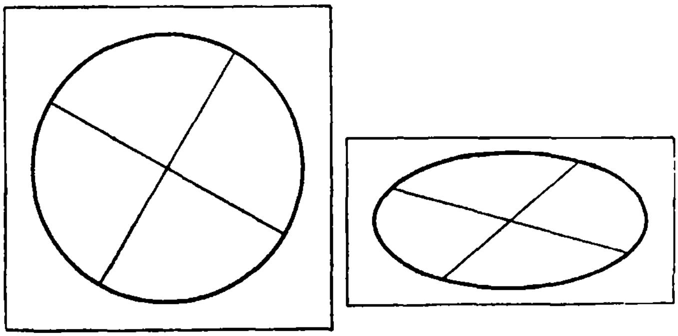

FIG. 69.—Compresión de un círculo.

elipse y el ángulo entre los diámetros de la elipse ya no será recto. La circunferencia tiene la propiedad de que sus puntos equidistan del centro, mientras que esto no es verdad para la elipse. Pudiera parecer que todas las propiedades geométricas de la figura original han sido destruídas por la compresión. Pero ni mucho menos es así; p. ej., la propiedad de que el centro divide a cada diámetro en dos partes iguales es válida, tanto para la circunferencia como para la elipse. He aquí una propiedad que subsiste después del cambio drástico en las magnitudes de la figura original. Esta observación sugiere la posibilidad de clasificar los teoremas sobre las figuras geométricas según que sigan verificándose o dejen de ser ciertos cuando la figura se somete a una compresión uniforme. Más en general: dado un tipo definido de transformaciones de una figura (como la clase de los movimientos rígidos, compresiones, inversiones respecto a circunferencias, etc.) podemos investigar qué propiedades de la figura permanecen invariables cuando se somete a esta clase de transformaciones. El conjunto de teoremas referentes a estas propiedades será la *geometría asociada a dicha clase de transformaciones.* La idea de clasificar las diferentes ramas de la geometría de acuerdo con los tipos de transformaciones consideradas fué propuesta por Félix Klein (1849-1925) en su famosa comunicación (el «Programa de Erlangen») presentada en 1872. Desde entonces ha dominado enormemente el pensamiento matemático.

En el capítulo V nos encontraremos con el hecho verdaderamente sorprendente de que ciertas propiedades geométricas son tan íntimamente intrínsecas, que persisten después que las figuras han sido sometidas a deformaciones muy arbitrarias; figuras dibujadas en una lámina de caucho que se estira o comprime de cualquier manera, todavía conservan algunas de sus características originales. En este capítulo, sin embargo, vamos a ocuparnos solamente de aquellas propiedades que permanecen invariables o «invariantes» bajo un tipo especial de transformaciones, situado entre la clase muy restringida de los movimientos rígidos, por un lado, y la clase más general de las deformaciones arbitrarias, por otro. Ésta es la clase de las «transformaciones proyectivas».

2. Transformaciones proyectivas.—Los matemáticos se vieron impulsados desde hace mucho tiempo al estudio de estas propiedades geométricas, debido a los problemas de *perspectiva,* que fueron estudiados por artistas como Leonardo de Vinci y Alberto Durero. La imagen trazada por un pintor puede considerarse como la proyección del original sobre la tela, con el centro de proyección en el ojo del pintor. En este proceso, las longitudes y los ángulos se alteran necesariamente en forma que depende de las posiciones relativas de los diversos objetos pintados. Sin embargo, puede reconocerse sobre la tela, generalmente, la estructura geométrica del original. ¿Cómo es esto posible? Lo es, porque existen propiedades geométricas «invariantes en la proyección», propiedades que aparecen sin alterar en la imagen y que hacen posible la identificación. Deducir y analizar estas propiedades constituye el objeto de la geometría proyectiva.

Es obvio que los teoremas de esta rama de la geometría no pueden ser proposiciones sobre longitudes y ángulos o sobre congruencia. Algunos hechos aislados, de naturaleza proyectiva, son bien conocidos desde el siglo XVII, y aun, como en el caso del «teorema de Menelao», desde la antigüedad clásica. Pero el estudio sistemático de la geometría proyectiva no comenzó hasta fines del siglo XVIII, cuando l'École Polytechnique de París inició una nueva etapa de progreso matemático, particularmente en geometría. Esta Escuela, surgida de la Revolución francesa, produjo muchos oficiales para los servicios militares de la

República. Uno de sus graduados fué J. V. Poncelet (1788-1867); que escribió su famoso *Traité des propriétés projectives des figures* en 1813, mientras era prisionero de guerra en Rusia. En el siglo XIX, bajo la influencia de Steiner, von Staudt, Chasles y otros, la geometría proyectiva se convirtió en uno de los principales temas de investigación matemática. Su popularidad fué debida en parte a su gran encanto estético y en parte también a su efecto aclaratorio sobre la geometría en conjunto, y a su íntima conexión con la geometría no euclídea y el álgebra.

II. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1. Grupo de las transformaciones proyectivas.—Definiremos primero la clase o *grupo* [1] de las transformaciones proyectivas. Supongamos dos planos π y π' en el espacio, no necesariamente paralelos, y

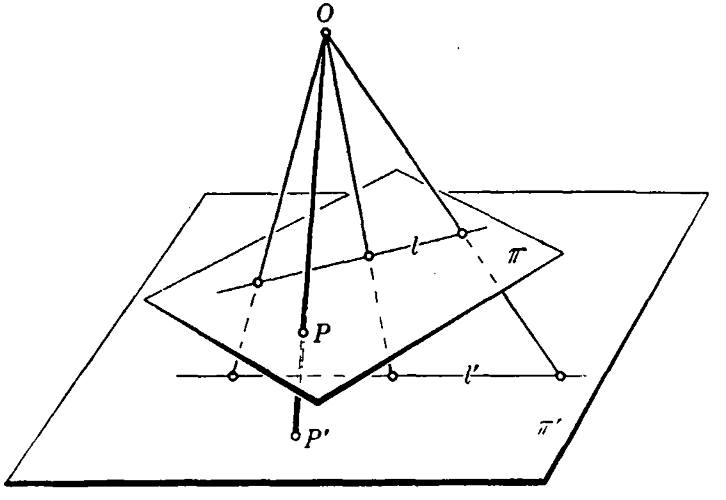

FIG. 70.—Proyección desde un punto.

hagamos una *proyección central* de π sobre π' desde un centro dado O no situado sobre π ni sobre π', definiendo la imagen de cada punto P de π como aquel punto P' de π' tal que P y P' están sobre la misma

[1] La palabra *grupo*, cuando se aplica a una clase de transformaciones, implica que la aplicación sucesiva de dos transformaciones de la clase equivale a una transformación de la misma clase, y que la *inversa* de una transformación de la clase pertenece también a ella. Las propiedades de grupo de las operaciones matemáticas han desempeñado y seguirán desempeñando un gran papel en muchos campos, aunque en geometría, quizá, la importancia del concepto de grupo ha sido algo exagerada.

recta que pasa por O. Podemos también efectuar una *proyección paralela* si hacemos que todos los rayos proyectantes sean paralelos. Del mismo modo se puede definir la proyección de una recta l de un plano π sobre otra recta l' de π' desde un punto O de π, o hacerlo mediante proyección paralela.

Una representación de una figura sobre otra mediante una proyección central o paralela, o por una sucesión finita de tales proyecciones, se llama *transformación proyectiva*[1]. La *geometría proyectiva* del plano

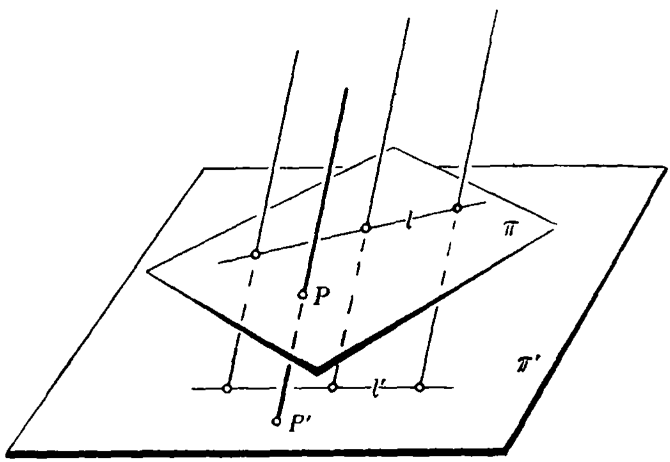

FIG. 71.—Proyección paralela.

o de la recta consiste en el conjunto de aquellas proposiciones geométricas que permanecen invariables en una transformación proyectiva arbitraria de las figuras a las que se refieren. Por el contrario, llamaremos *geometría métrica* al conjunto de aquellas proposiciones que tratan de las magnitudes de las figuras, invariantes sólo respecto a la clase de los movimientos rígidos.

Algunas propiedades proyectivas pueden reconocerse inmediatamente. Un punto, por supuesto, se proyectará en un punto. Además, *una recta se proyectará en una recta*; pues si la recta l de π se proyecta sobre el plano π', la intersección de π' con el plano determinado por O y l será una recta[2]. Si un punto A y una recta l son incidentes[3], el

[1] Dos figuras relacionadas por una *sola* proyección se dicen comúnmente *perspectivas*. Así, pues, una figura F está ligada mediante una transformación proyectiva a otra F' si F y F' son perspectivas, o si podemos hallar una sucesión de figuras F, F_1, F_2, F_3, ... F_n, F', tales que cada una sea perspectiva con la siguiente.

[2] Hay excepciones si la recta OP es paralela al plano π (o si lo es el plano de O y l). Estas excepciones serán tratadas en IV.

[3] Un punto y una recta se dicen incidentes si la recta pasa por el punto o si el punto está en la recta.

punto correspondiente A' y la recta l' lo son también en la proyección. Luego la *incidencia de punto y recta es invariante respecto al grupo proyectivo.* De este hecho surgen muchas consecuencias simples, pero importantes. Si tres o más puntos son *colineales*, es decir, pertenecen a una misma recta, entonces sus imágenes son también colineales. Asimismo, si en el plano π tres o más rectas son *concurrentes*, es decir, inciden en un mismo punto, entonces sus imágenes serán también rectas concurrentes. Mientras estas propiedades simples, incidencia, colinealidad y concurrencia son *propiedades proyectivas* (es decir, propie-

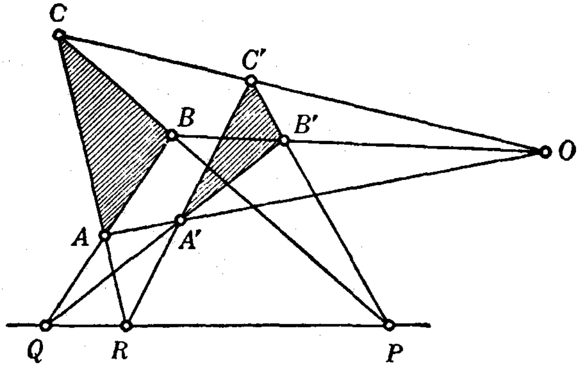

FIG. 72.—Configuración de Desargues en el plano.

dades invariantes en las proyecciones), en cambio, las medidas de longitudes y ángulos, y las razones de tales magnitudes, se alteran en general en la proyección. Los triángulos equiláteros e isósceles pueden proyectarse en triángulos cuyos lados tengan longitudes diferentes. Por tanto, aunque «triángulo» es un concepto de geometría proyectiva, «triángulo equilátero» no lo es, y pertenece sólo a la geometría métrica.

2. Teorema de Desargues.—Uno de los primeros descubrimientos de la geometría proyectiva fué el famoso teorema sobre triángulos de Desargues (1593-1662). *Si, en un plano, dos triángulos* ABC *y* A'B'C' *son tales que las rectas que unen vértices correspondientes concurren en un punto* O, *los lados correspondientes se cortan en tres puntos colineales.* La figura 72 ilustra el teorema y el lector puede dibujar otras figuras para comprobarlo experimentalmente. La demostración no es trivial, no obstante la sencillez de la figura, constituída sólo por rectas. El teorema pertenece sin duda a la geometría proyectiva, pues si proyectamos la figura entera sobre otro plano, conservará todas las propiedades enunciadas en el teorema. Daremos una demostración de este teorema en V. Por el momento, observemos el hecho notable de que el teorema de Desargues es también cierto si los triángulos están en *diferentes* planos (no paralelos), y que este teorema de Desargues de la geometría tridimensional es muy fácil de probar.

Supongamos que las rectas AA', BB' y CC' se cortan en O (figura 73), de acuerdo con la hipótesis. Entonces AB está en el mismo plano de $A'B'$, de modo que estas dos rectas se cortan en un punto Q; análogamente AC y $A'C'$ se cortan en R, y BC y $B'C'$ se cortan en P. Como P, Q y R están en las prolongaciones de los lados de ABC y $A'B'C'$, deben estar en el mismo plano de cada uno de los dos triángulos, y, en consecuencia, están sobre la recta de intersección de estos

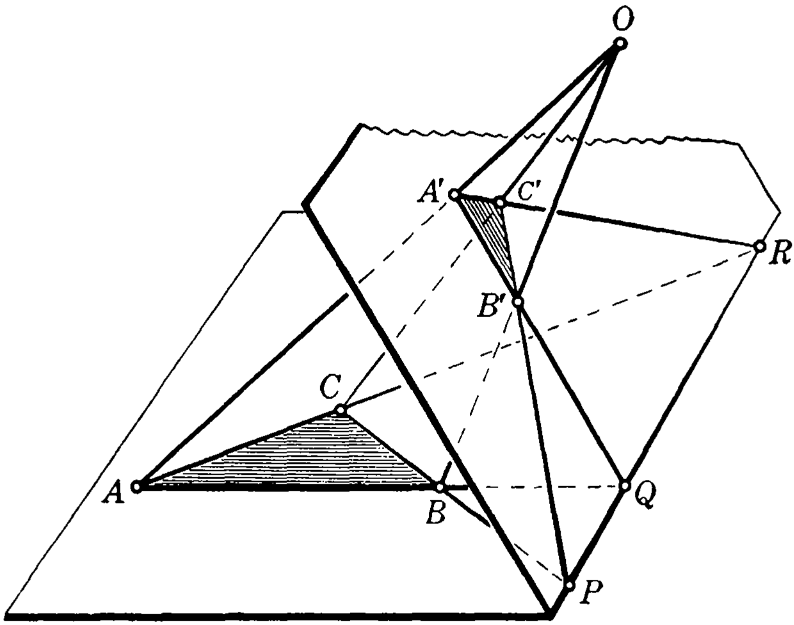

FIG. 73.—Configuración de Desargues en el espacio.

dos planos. Por tanto, P, Q y R son colineales, como queríamos probar.

Esta sencilla demostración sugiere que podemos probar el teorema para dos dimensiones mediante, por decirlo así, un paso al límite, aplastando la figura total de manera que los dos planos coincidan en el límite y el punto O, junto con los otros, caiga sobre este plano. Sin embargo, hay cierta dificultad en llevar a cabo tal proceso de límite, pues la recta de intersección PQR no está unívocamente determinada cuando los planos coinciden. No obstante, la figura 72 puede considerarse como una perspectiva de la figura del espacio representada en la 73, y este hecho puede utilizarse para demostrar el teorema en el caso plano.

En efecto, existe una diferencia fundamental entre el teorema de Desargues en el plano y en el espacio. Nuestra demostración en tres dimensiones utiliza razonamientos geométricos basados solamente en los conceptos de incidencia e intersección de puntos, rectas y planos. Puede probarse que la demostración del teorema bidimensional, *si se procede por completo en el plano*, requiere necesariamente el uso del concepto de semejanza de figuras, que es equivalente al concepto métrico de longitud y no es ya una noción proyectiva.

El teorema *recíproco* del de Desargues establece que si ABC y $A'B'C'$ son dos triángulos situados de modo que los puntos de intersección de los pares de lados correspondientes sean colineales, las rectas que unen vértices correspondientes son concurrentes. Su demostración para el caso en que los triángulos estén en dos planos no paralelos, se deja como ejercicio al lector.

III. RAZÓN DOBLE

1. Definición y prueba de su invariancia.—Así como la longitud de un segmento rectilíneo es la clave de la geometría métrica, hay también un concepto fundamental de la geometría proyectiva, mediante el cual pueden expresarse todas las propiedades netamente proyectivas de las figuras.

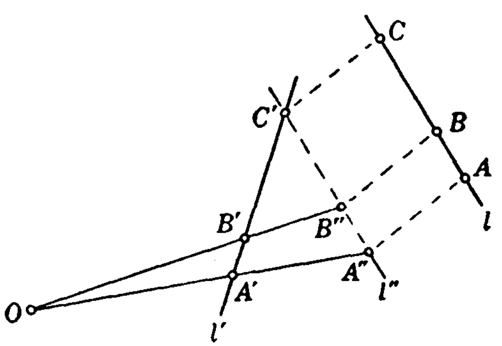

Fig. 74.

Si tres puntos A, B, C están sobre una recta, la proyección cambia, en general, no sólo las distancias AB y BC, sino también la razón AB/BC. En efecto, tres puntos cualesquiera A, B, C de una recta l pueden ser siempre coordinados con otros tres puntos arbitrarios A', B', C' de otra recta l' por medio de dos proyecciones sucesivas. Para esto, hagamos girar la recta l' alrededor del punto C', hasta que tome la posición l'' paralela a l (véase Fig. 74). A continuación, proyectamos l sobre l'', mediante una proyección paralela a la recta que une C con C', definiendo tres puntos A'', B''

y C'' ($C'' = C'$). Las rectas $A'A''$ y $B'B''$ deben cortarse en un punto O que elegimos como centro de la segunda proyección. Estas dos proyecciones nos dan el resultado deseado[1].

Según acabamos de ver, ninguna magnitud relativa sólo a tres puntos de una recta queda invariante en una proyección. Pero —y esto constituye el descubrimiento decisivo de la geometría proyectiva— si tenemos *cuatro* puntos A, B, C, D de una recta, y los proyectamos sobre otra recta en A', B', C', D', existe entonces una cierta magnitud, llamada *razón doble* de los cuatro puntos, que conserva su valor en la proyección. He aquí una propiedad matemática de un conjunto de cuatro puntos de una recta que no desaparece mediante proyección y que puede reconocerse en cualquier imagen de la recta. La razón doble no es ni una longitud ni un cociente de dos longitudes, sino *la razón de dos cocientes*; si consideramos los cocientes CA/CB y DA/DB, por definición, la razón doble de los cuatro puntos A, B, C, D, tomados en este orden, es:

$$x = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

Vamos a demostrar que *la razón doble de cuatro puntos es invariante en la proyección*; es decir, que si A, B, C, D y A', B', C', D' son puntos correspondientes de dos rectas relacionadas por proyección, se verifica

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}$$

La demostración se logra con medios elementales. Recordemos que el área de un triángulo es igual a $^1/_2$ (base $\times$ altura) y está también dada por la mitad del producto de dos cualesquiera de sus lados por el seno del ángulo comprendido. Tenemos, en la figura 75:

$$\text{área } OCA = {}^1/_2 h \cdot CA = {}^1/_2 OA \cdot OC \text{ sen } \widehat{COA}$$

$$\text{área } OCB = {}^1/_2 h \cdot CB = {}^1/_2 OB \cdot OC \text{ sen } \widehat{COB}$$

$$\text{área } ODA = {}^1/_2 h \cdot DA = {}^1/_2 OA \cdot OD \text{ sen } \widehat{DOA}$$

$$\text{área } ODB = {}^1/_2 h \cdot DB = {}^1/_2 OB \cdot OD \text{ sen } \widehat{DOB},$$

[1] ¿Qué sucede si las rectas $A'A''$ y $B'B''$ son paralelas?

de donde se deduce:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA} = \frac{OA \cdot OC \cdot \operatorname{sen} \widehat{COA}}{OB \cdot OC \cdot \operatorname{sen} \widehat{COB}} \cdot \frac{OB \cdot OD \cdot \operatorname{sen} \widehat{DOB}}{OA \cdot OD \cdot \operatorname{sen} \widehat{DOA}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \widehat{COA}}{\operatorname{sen} \widehat{COB}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \widehat{DOB}}{\operatorname{sen} \widehat{DOA}}$$

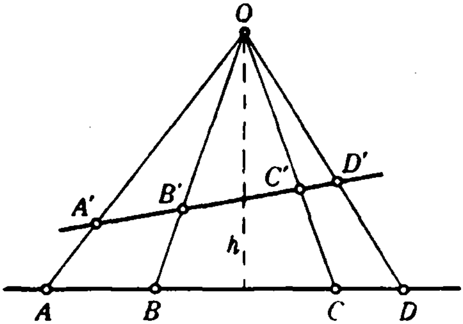

FIG. 75.—Conservación de la razón doble en la proyección central.

Luego la razón doble de A, B, C, D depende únicamente de los ángulos subtendidos desde O por los segmentos que unen A, B, C, D. Como estos ángulos son los mismos para otros cuatro puntos cualesquiera A', B', C', D' en los que A, B, C, D puedan ser proyectados desde O, resulta que la razón doble permanece invariable en la proyección.

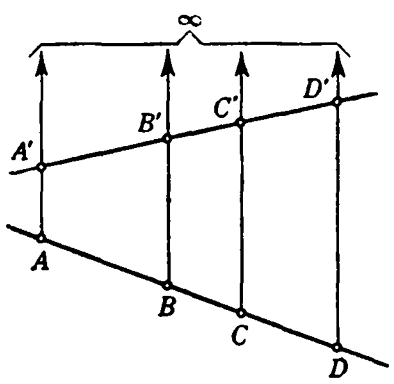

FIG. 76.—Conservación de la razón doble en la proyección paralela.

Que la razón doble de cuatro puntos no varía en una proyección *paralela* se obtiene de propiedades elementales de los triángulos semejantes, y la demostración se deja como ejercicio al lector.

Hasta aquí, hemos entendido que la razón doble de cuatro puntos A, B, C, D de una recta l sólo incluye longitudes positivas. Resulta conveniente modificar esta definición como sigue: elegimos un sentido sobre l como positivo, y convenimos en que las longitudes medidas en este sentido serán positivas, mientras que las medidas en sentido opuesto serán negativas. Definiremos entonces la razón doble de A, B, C, D, considerados en este orden, por

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}, \qquad [1]$$

donde los números CA, CB, DA, DB han de ser tomados con su propio signo. Como la inversión del sentido positivo de l sólo cambia el signo de cada término de este cociente, el valor de $(ABCD)$ no dependerá del sentido elegido como positivo. Es fácil ver que $(ABCD)$ será negativa o positiva según que el par de puntos A, B esté o no separado (es decir, entrelazado) por el par C, D. Como esta propiedad de separación es invariante en la proyección, el signo de la razón doble $(ABCD)$ es también invariante. Si elegimos un punto fijo O de l como origen, y tomamos como abscisa x de cada punto de l su distancia orientada a partir de O; es decir, si las abscisas de A, B, C, D son x_1, x_2, x_3, x_4, respectivamente, tenemos que

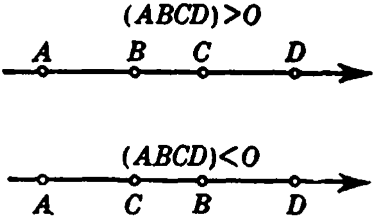

FIG. 77.—Signo de la razón doble.

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1}$$

Si $(ABCD) = -1$, es decir, $CA/CB = -DA/DB$, C y D dividen entonces al segmento AB, interior y exteriormente, en la misma razón. En este caso se dice que C y D dividen al segmento AB *armónicamente*, y cada uno de los puntos C y D se llama *conjugado armónico* del otro, respecto del par A, B. Si $(ABCD) = 1$, los puntos C y D (o A y B) coinciden.

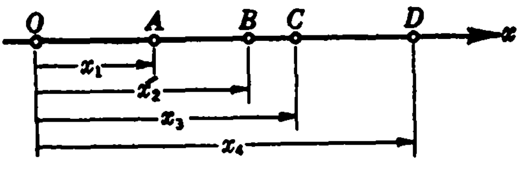

FIG. 78.—Razón doble expresada por medio de abscisas.

Se debe tener presente que el orden en que se toman A, B, C, D

es parte esencial de la definición de la razón doble $(ACBD)$; p. ej., si $(ABCD) = \lambda$, la razón doble $(BACD)$ es $1/\lambda$, mientras que $(ACBD) = 1 - \lambda$, como el lector puede verificar fácilmente. Cuatro puntos A, B, C, D pueden ordenarse de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneras distintas, cada una de las cuales da un cierto valor a la razón doble. Algunas de estas permutaciones dan, no obstante, el mismo valor que el orden original A, B, C, D; por ejemplo, $(ABCD) = (BADC)$. Dejamos como ejercicio al lector el demostrar que hay sólo seis valores diferentes de la razón doble para las 24 permutaciones diferentes de los puntos, que son:

$$\lambda, \quad 1 - \lambda, \quad 1/\lambda, \quad \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

Estas seis cantidades son, en general, distintas, pero dos de ellas pueden coincidir, como en el caso de la división armónica, cuando $\lambda = -1$.

Podemos definir también la *razón doble de cuatro rectas* 1, 2, 3, 4 *coplanarias* (es decir, situadas en un mismo plano) y *concurrentes*, como la razón doble de los cuatro puntos de intersección de estas rectas con otra del mismo plano. La posición de esta quinta recta es indiferente, debido a la invariancia de la razón doble en la proyección. Equivalente a ésta es la definición:

$$(1\,2\,3\,4) = \frac{\text{sen}\,(1, 3)}{\text{sen}\,(2, 3)} : \frac{\text{sen}\,(1, 4)}{\text{sen}\,(2, 4)},$$

que debe tomarse con signo más o menos según que un par de rectas separe o no al otro par. [En esta fórmula (1, 3), p. ej., representa el ángulo formado por las rectas 1 y 3.] Finalmente, podemos definir la *razón doble de cuatro planos coaxiales* (cuatro planos del espacio que se cortan en una recta l, su eje). Si una recta corta a los planos en cuatro puntos, estos puntos tendrán siempre la misma razón doble, cualquiera que sea la posición de dicha recta. (La demostración de esta propiedad se deja al lector como ejercicio.) Podemos, pues, adoptar este valor como el de la razón doble de los cuatro planos. En forma equivalente, se puede definir la razón doble de cuatro planos coaxiales por medio de la de las cuatro rectas determinadas al cortarlos por un quinto plano (véase Fig. 79).

El concepto de razón doble de cuatro planos nos lleva naturalmente a la pregunta de si puede definirse una transformación proyectiva del espacio *tridimensional* en sí mismo. No es posible generalizar de modo inmediato la definición mediante una proyección central, de dos a tres dimensiones; pero puede demostrarse que toda transformación continua de un plano en sí mismo que establezca una correspondencia biunívoca entre puntos y puntos, por una parte, y rectas y rectas, por otra, es una transformación proyectiva. Este teorema sugiere la siguiente definición para el caso de tres dimensiones. Una

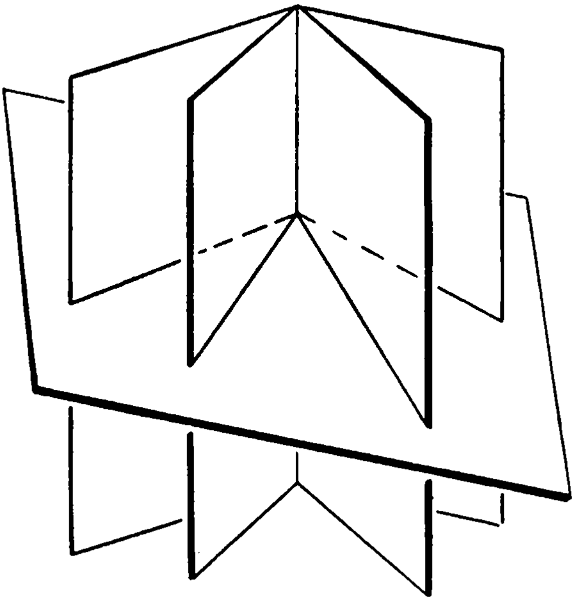

FIG. 79.—Razón doble de planos coaxiales.

transformación proyectiva del espacio es toda transformación biunívoca y continua que conserva las rectas. Puede demostrarse que en estas transformaciones la razón doble permanece invariante.

Las proposiciones precedentes se pueden completar mediante algunas observaciones. Supongamos dados tres puntos distintos A, B, C de una recta, con abscisas x_1, x_2, x_3; se desea encontrar un cuarto punto D, tal que $(ABCD) = \lambda$, siendo λ prefijado. (El caso especial $\lambda = -1$, para el cual el problema equivale a la construcción del cuarto armónico, será explicado con más detalle en la sección próxima.) En general, el problema tiene solución única, pues si es x la abscisa del punto pedido D, la ecuación

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x - x_2}{x - x_1} = \lambda \qquad [2]$$

tiene exactamente una solución x. Si se dan x_1, x_2, x_3, y simplificamos la ecuación [2] haciendo $(x_3 - x_1)/(x_3 - x_2) = k$, encontraremos, al resolver dicha ecuación, que $x = (kx_2 - \lambda x_1)/(k - \lambda)$; p. ej., si los tres puntos A, B, C son equidistantes, de abscisas $x_1 = 0$, $x_2 = d$, $x_3 = 2d$, respectivamente, entonces: $k = (2d - 0)/(2d - d) = 2$, y $x = 2d/(2 - \lambda)$.

Si proyectamos la misma recta l sobre dos rectas distintas, l' y l'', desde dos centros diferentes O' y O'', obtenemos una correspondencia

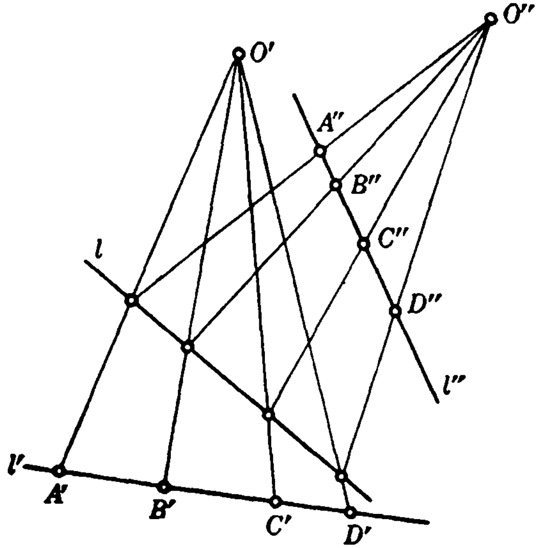

FIG. 80.—Correspondencia proyectiva entre los puntos de dos rectas.

$P \longleftrightarrow P'$ entre los puntos de l y l', y otra $P \longleftrightarrow P''$ entre los de l y l''. Esto establece una correspondencia $P' \longleftrightarrow P''$ entre los puntos de l' y los de l'', con la propiedad de que toda cuaterna de puntos A', B', C', D', de l' tiene la misma razón doble que la cuaterna correspondiente A'', B'', C'', D'', de l''. Toda correspondencia biunívoca entre los puntos de dos rectas que goce de esta propiedad se llamará *correspondencia proyectiva*, cualquiera que sea la forma en que haya sido definida.

Ejercicios:

1. Demuéstrese que, dadas dos rectas en correspondencia proyectiva, puede trasladarse una de ellas mediante un desplazamiento paralelo hasta una posición tal que la correspondencia dada se obtenga por simple proyección. (*Sugerencia:* háganse coincidir un par de puntos correspondientes de las dos rectas.)

2. Basándose en el resultado precedente, pruébese que si los puntos de las rectas l y l' se coordinan mediante una sucesión finita de proyecciones sobre varias

rectas intermedias, usando centros arbitrarios de proyección, el mismo resultado puede obtenerse mediante sólo *dos* proyecciones.

2. Aplicación al cuadrilátero completo.—Como aplicación interesante de la invariancia de la razón doble, estableceremos un teorema sencillo, pero importante, de geometría proyectiva. Se refiere al *cuadrilátero completo*, figura que consta de cuatro rectas cualesquiera (no concurrentes tres a tres), y de los seis puntos en que se cortan. En la figura 81, las cuatro rectas son AE, BE, BI y AF. Las rectas AB, EG e IF son las *diagonales* del cuadrilátero. Elijamos una diagonal, p. ej., AB, y señalemos sobre ella los puntos C y D donde encuentra a las otras dos diagonales. El teorema dice entonces que $(ABCD) = -1$, o sea: *los puntos de intersección de una diagonal con las otras dos separan armónicamente a los vértices del cuadrilátero situados sobre dicha diagonal*.

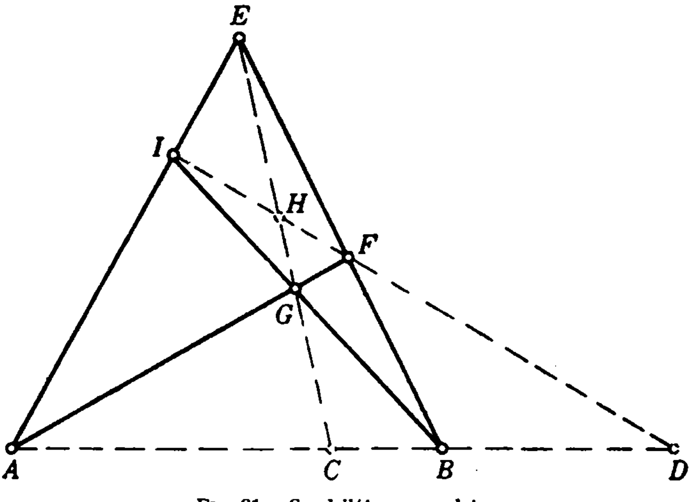

FIG. 81.—Cuadrilátero completo.

Para probarlo basta observar que

$$x = (ABCD) = (IFHD) \quad \text{por proyección desde } E.$$
$$(IFHD) = (BACD) \quad \text{por proyección desde } G.$$

Pero sabemos que $(BACD) = 1/(ABCD)$, o sea, $x = 1/x$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$, y como C, D separan a A y B, la razón doble x debe ser negativa; es decir, igual a -1, quedando demostrado el teorema.

Esta notable propiedad del cuadrilátero completo nos permite construir, sin más ayuda que la regla, el conjugado armónico, respecto a un par A, B, de un tercer punto colineal C. Necesitamos solamente elegir un punto E fuera de la recta; trazar EA, EB, EC; elegir un punto G sobre EC; trazar AG y BG, que cortan a EB y EA en F e I, respectivamente, y dibujar IF, la cual corta a la recta ABC en el punto D, cuarto armónico pedido.

FIG. 82.—Prolongación de una recta al otro lado de un obstáculo.

Problema.—Dado un segmento AB en el plano y una región R, como se muestra en la figura 82, se desea prolongar la recta a la derecha de R. ¿Cómo puede lograrse esto con la regla sola, sin atravesar R en la construcción? (*Sugerencia:* Elíjanse dos puntos C, C' del segmento AB, y hállense sus conjugados armónicos D, D', respectivamente, por medio de cuatro cuadriláteros que tengan A y B como vértices.)

IV. PARALELISMO E INFINITO

1. Puntos del infinito como «puntos ideales».—Algunos de los argumentos utilizados en la sección precedente fallan si ciertas rectas de las utilizadas en las construcciones, supuestas prolongadas hasta su intersección, resultan paralelas; p. ej., en la construcción del cuarto armónico, D deja de existir si la recta IF resulta paralela a AB. El razonamiento geométrico parece complicarse a cada paso por el hecho de que dos rectas paralelas no se cortan, ya que en toda discusión que incluya la intersección de rectas el caso excepcional de paralelismo debe considerarse y formularse por separado. Asimismo, la proyección desde un centro O debe distinguirse de la proyección paralela, la cual exige tratamiento aparte. Si realmente entrásemos en una detallada discusión de cada caso excepcional, la geometría proyectiva resultaría muy complicada. Nos vemos inducidos, por tanto, a ensayar un nuevo recurso, *el de hallar generalizaciones de nuestros conceptos básicos, que eliminen las excepciones.*

Aquí la intuición geométrica nos indica el camino; si una recta que corta a otra gira lentamente hasta ser paralela, el punto de intersección de ambas se alejará hasta el infinito. Podemos simplemente decir que las dos rectas se cortan en un «punto del infinito». Lo esencial es, entonces, dar significado preciso a esta vaga afirmación, con el fin de poder operar con los puntos del infinito o, como a veces se dice, puntos ideales, del mismo modo que con los puntos ordinarios del plano o del espacio. En otras palabras, deseamos que todas las reglas concernientes a las relaciones entre puntos, rectas y planos, etc., persistan aun cuando estos elementos geométricos sean ideales. Para alcanzar este propósito podemos proceder, bien intuitiva o formalmente, tal como se hizo al extender el sistema numérico, donde un método consistía en la idea intuitiva de medida, y el otro partía de las reglas formales de las operaciones aritméticas.

Antes de nada, observemos que en geometría sintética, incluso los conceptos básicos de punto y recta «ordinarios» no están definidos matemáticamente. Las llamadas definiciones de estos entes que encontramos con frecuencia en los textos de geometría elemental son sólo descripciones más o menos sugerentes. En el caso de los elementos geométricos ordinarios, nuestra intuición nos tranquiliza en lo que a su «existencia» se refiere. Pero lo que realmente necesitamos en geometría, considerada como un sistema matemático, es la validez de ciertas reglas mediante las cuales podamos operar con estos conceptos, tales como unir puntos, hallar la intersección de rectas, etc. Lógicamente considerado, un «punto» no es una «cosa en sí», sino que está caracterizado por la totalidad de las proposiciones mediante las cuales se halla relacionado con otros objetos. La existencia matemática de «puntos del infinito» quedará asegurada en cuanto se establezcan, de forma clara y no contradictoria, las *propiedades* matemáticas de estos nuevos entes; es decir, sus relaciones con los puntos «ordinarios» y entre sí. Los axiomas ordinarios de la geometría (p. ej., el de Euclides) son abstracciones del mundo físico, de señales de lápiz o de tiza, cuerdas tensas, rayos de luz, varillas rígidas, etc. Las propiedades que estos axiomas atribuyen a los puntos y rectas matemáticos son descripciones muy simplificadas e idealizadas de la conducta de sus representantes físicos. Entre dos señales puntiformes marcadas con lápiz, pueden trazarse no una, sino varias rectas. Si los puntos se hacen cada vez más pequeños, entonces todas estas rectas tendrán aproximadamente la misma apariencia. Esto es lo que se piensa cuando se establece como axioma geométrico que «por dos puntos puede trazarse *una* recta y *sólo una*»; no nos referimos a los puntos y rectas físicos, sino a los puntos y rectas conceptuales y abstractos de la geometría. Los puntos y rectas geométricos tienen propiedades esencialmente más sencillas que las de los objetos físicos, y esta simplificación procura la condición esencial para el desarrollo de la geometría como ciencia deductiva.

Conforme hemos señalado, la geometría ordinaria de los puntos y rectas se complica grandemente por el hecho de que un par de rectas paralelas no tienen punto de intersección. Nos vemos, pues, obligados a introducir una posterior simplificación en la estructura de la geometría, ampliando el concepto de punto geométrico, para hacer desaparecer esta excepción. Y, análogamente a la forma en que hemos ampliado el concepto de número para hacer posibles sin restricción la resta y la división, aquí también nos guiará el deseo de conservar, en el dominio ampliado, las leyes que gobiernan el dominio original.

Convenimos, pues, en agregar a los puntos ordinarios de cada recta un solo punto «ideal». Este punto se considerará como perteneciente a todas las rectas paralelas a la dada y únicamente a ellas. Como consecuencia de este convenio, *todo* par de rectas del plano se cortará en un solo punto; si las rectas no son paralelas, su intersección será un punto ordinario, mientras que si lo son, se cortarán en el punto ideal común a las dos rectas. Por razones intuitivas, el punto ideal de una recta se llama *punto del infinito* de la misma.

El concepto intuitivo de punto en el infinito de una recta parece sugerir que debían agregarse *dos* puntos ideales a cada recta. La razón para que sea uno solo, tal como hemos hecho, es que deseamos conservar la ley de que por dos puntos puede trazarse una y sólo una recta. Si una recta tuviera dos puntos del infinito comunes con toda recta paralela, entonces por estos dos «puntos» pasarían infinitas rectas paralelas.

Convendremos también en agregar a las rectas ordinarias del plano una sola recta «ideal» (llamada también recta del infinito del plano), *la cual contiene todos los puntos ideales del plano y ningún otro punto.* Se nos impone precisamente este convenio si deseamos conservar la ley inicial de que entre dos puntos cualesquiera puede trazarse una recta y la nueva ley, según la cual dos rectas cualesquiera se cortan en un punto. Para ver esto, elijamos dos puntos ideales arbitrarios. La recta única determinada por estos dos puntos no puede ser una recta ordinaria, ya que por el convenio adoptado, toda recta ordinaria contiene un solo punto ideal. Además, esta recta no puede contener puntos ordinarios, puesto que un punto ordinario y uno ideal determinan una recta ordinaria. Finalmente, esta recta debe contener *todos* los puntos ideales, si deseamos que tenga un punto común con toda recta ordinaria. En consecuencia, esta recta debe tener precisamente las propiedades que hemos asignado a la recta ideal del plano.

De acuerdo con nuestros convenios, un punto del infinito está determinado o representado por una familia de rectas paralelas, así como un número irracional viene determinado por una sucesión de intervalos racionales. La afirmación de que la intersección de dos rectas paralelas es un punto del infinito carece de significado misterioso; es sólo una manera cómoda de afirmar que las rectas son paralelas.

Esta forma de expresar el paralelismo en un lenguaje originalmente reservado para objetos intuitivamente diferentes, tiene el único propósito de evitar la enumeración de los casos excepcionales superfluos; éstos quedan ahora automáticamente incluídos en las mismas expresiones verbales u otros símbolos utilizados para los casos «ordinarios».

En resumen, nuestros convenios acerca de los puntos del infinito han sido elegidos de manera que las leyes que rigen la relación de incidencia entre puntos y rectas ordinarias sigan cumpliéndose en el dominio ampliado de puntos, mientras que la operación de hallar el punto de intersección de dos rectas, antes sólo posible si éstas no eran paralelas, puede ahora efectuarse sin ninguna restricción. Las consideraciones que llevan a esta simplificación formal en las propiedades de la relación de incidencia pueden parecer algo abstractas, pero quedan ampliamente justificadas por el resultado, como el lector comprobará en las páginas que siguen.

2. Elementos ideales y proyección.—La introducción de los puntos y la recta del infinito en el plano nos permite tratar la proyección

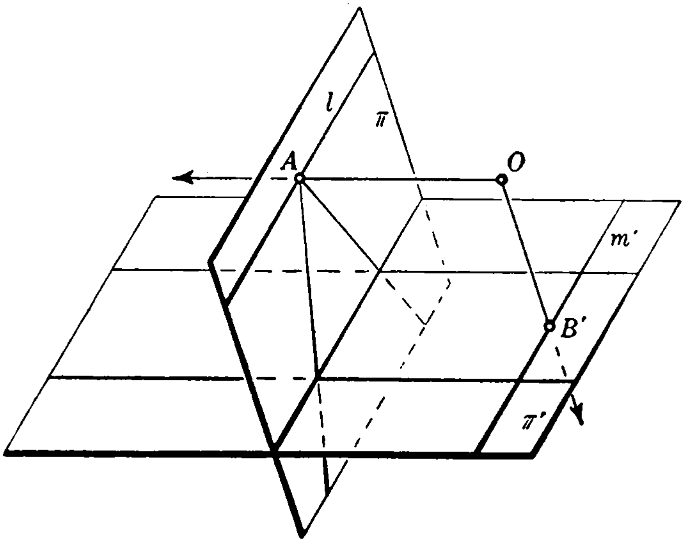

Fig. 83.—Proyección en elementos del infinito.

de un plano sobre otro en forma mucho más satisfactoria. Consideremos la proyección de un plano π sobre otro plano π', desde un centro O (Fig. 83). Esta proyección establece una correspondencia entre los puntos y las rectas de π y de π'. A cada punto A de π corresponde un solo punto A' de π', con las siguientes excepciones: si el rayo proyectante que pasa por O es *paralelo* al plano π', entonces corta al plano π en un punto A, al que no corresponde ningún punto ordinario de π'. Estos puntos excepcionales de π están en una recta l a la cual no corresponde ninguna recta ordinaria de π'. Pero estas excepciones se eliminan, si convenimos en que a A corresponde el punto del infinito de π' en la dirección de la recta OA, y que a l corresponde la recta del infinito de π'. En igual forma, asignamos un punto del infinito de π a todo punto B', de la recta m' de π', por la que pasan todos los rayos trazados por O paralelos al plano π. A m' le corresponde la recta del infinito de π. De este modo, mediante la introducción de los puntos y la recta del infinito del plano, *una proyección de un plano sobre otro establece una correspondencia entre los puntos y rectas de ambos planos, que es biunívoca sin excepción.* (Esto hace desaparecer las excepciones mencionadas en la nota [2] de la pág. 181.) Además, es fácil ver que, como consecuencia de nuestro convenio, *un punto estará sobre una recta si, y sólo si, la proyección del punto está sobre la proyección de la recta.* Por tanto, todas las proposiciones acerca de puntos colineales, rectas concurrentes, etc., que incluyan sólo puntos, rectas y la relación de incidencia, deben considerarse como invariantes respecto a la proyección en sentido amplio. Esto nos permite tratar de los puntos del infinito de un plano π operando con los puntos ordinarios correspondientes de un plano π', relacionado con π mediante una proyección.

*La interpretación de los puntos del infinito de un plano π, por medio de una proyección desde un punto exterior O sobre puntos ordinarios de otro plano π', puede utilizarse para dar un «modelo» euclídeo concreto del plano ampliado. Para este fin, olvidémonos del plano π' y fijemos nuestra atención sobre π y las rectas que pasan por O. A cada punto ordinario de π corresponde una recta que pasa por O y no es paralela a π; a cada punto del infinito de π corresponde una recta que pasa por O y es paralela a π. Luego a la totalidad de los puntos ordinarios e ideales de π, corresponde la totalidad de las rectas que pasan por O, y esta correspondencia es biunívoca sin excepción. A los *puntos de una recta* de π corresponden las *rectas* de un *plano* que pasa por O. Un punto y una recta de π son incidentes, si, y sólo si, la recta y plano correspondientes que pasan por O lo son. Por tanto, la geometría de la incidencia de puntos y rectas del plano ampliado es por entero equivalente a la geometría de la incidencia de rectas y planos ordinarios que pasan por un punto fijo del espacio.

*En tres dimensiones la situación es similar, aunque ya no podemos concretarla intuitivamente por proyección. De nuevo introducimos un punto del infinito asociado con cada familia de rectas paralelas. En cada plano tendremos una recta del infinito. A continuación deberemos introducir un nuevo elemento, el *plano del infinito,* formado por todos los puntos del infinito del espacio y que contiene todas las rectas del infinito. Cada plano ordinario corta al plano del infinito en su recta del infinito.

3. Razón doble con elementos en el infinito.—Debe hacerse una aclaración acerca de la razón doble cuando incluye elementos del infinito. Designemos el punto del infinito de una recta l por el símbolo ∞. Si A, B, C son tres puntos ordinarios de l, entonces podemos asignar un valor al símbolo $(ABC\infty)$ de la siguiente manera: elegido un punto P de l, $(ABC\infty)$ será el límite a que tiende $(ABCP)$ cuando P se aleja infinitamente sobre l; pero

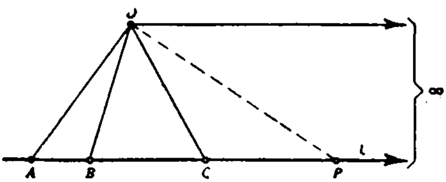

FIG. 84.—Razón doble con un punto en el infinito.

$$(ABCP) = \frac{CA}{CB} : \frac{PA}{PB},$$

y cuando P se aleja al infinito, PA/PB tiende a 1; en consecuencia, definimos $(ABC\infty) = CA/CB$.

En particular, si $(ABC\infty) = -1$, C es el punto medio del segmento AB. *El punto medio de un segmento y el punto del infinito de la recta soporte dividen armónicamente al segmento.*

Ejercicios: ¿Cuál es la razón doble de las cuatro rectas l_1, l_2, l_3, l_4, si son paralelas? ¿Cuál es la razón doble, si l_4 es la recta del infinito?

V. APLICACIONES

1. Notas preliminares.—Con la introducción de los elementos del infinito ya no es necesario enunciar explícitamente los casos excepcionales que surgen en las construcciones y teoremas, cuando dos o más rectas son paralelas. Sólo necesitamos recordar que si un punto está en el infinito, todas las rectas que pasan por él son paralelas. La distinción entre proyección central y paralela resulta innecesaria, pues la última significa simplemente proyección desde un punto del infinito. En la figura 72 el punto O o la recta PQR pueden ser del infinito (la Fig. 85 muestra el primer caso). Se deja como ejercicio al lector el formular en lenguaje «finito» el correspondiente enunciado del teorema de Desargues.

No sólo el *enunciado*, sino también la *demostración* de un teorema proyectivo resulta con frecuencia más sencilla mediante el uso de elementos del infinito. El principio general es el siguiente: por «clase proyectiva» de una figura geométrica F entendemos el conjunto de todas las figuras que pueden resultar de F por medio de transformaciones proyectivas. Las propiedades proyectivas de F serán idénticas a las de cualquier miembro de su clase proyectiva, ya que las

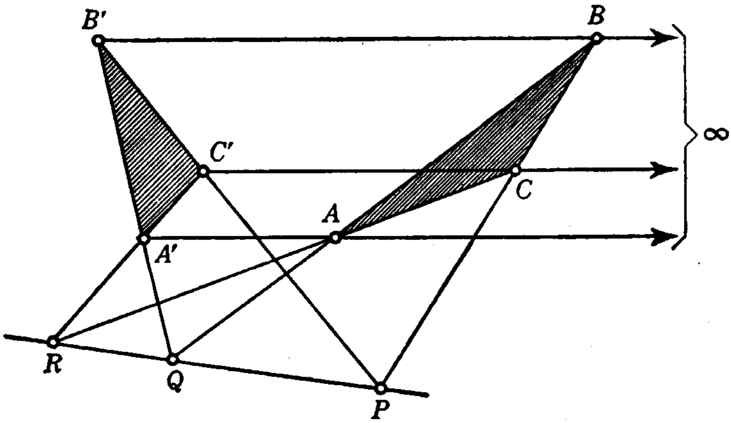

FIG. 85.—Configuración de Desargues con el centro en el infinito.

propiedades proyectivas son, por definición, invariantes en la proyección. Así, todo teorema proyectivo (es decir, referente sólo a propiedades proyectivas) que se verifique para F será cierto también para todo miembro de la clase proyectiva de F, y recíprocamente. Por tanto, para demostrar uno de tales teoremas para F, bastará hacerlo para otro miembro cualquiera de su clase proyectiva. Es posible a veces sacar ventaja de esto hallando un miembro especial de la clase proyectiva de F para el cual el teorema sea más fácil de demostrar que en el caso de la propia figura F; p. ej., dos puntos cualesquiera A, B de un plano π pueden transformarse en puntos del infinito, proyectándolos desde un centro O sobre un plano π' paralelo al plano de OAB; las rectas que pasan por A, y aquellas que pasan por B, se transformarán en dos familias de rectas paralelas. En los teoremas proyectivos que vamos a demostrar en esta sección haremos uso de esta transformación preliminar.

La siguiente propiedad elemental referente a rectas paralelas nos será muy útil en lo que sigue: sean dos rectas que pasan por un

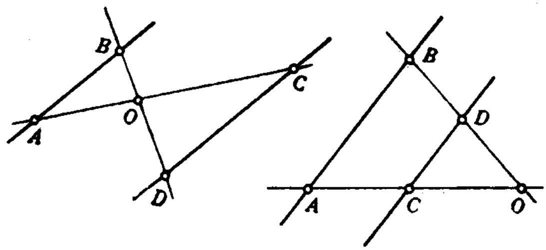

FIG. 86.

punto O, y cortan a un par de rectas l_1 y l_2 en los puntos A, B, C, D, tal como se ve en la figura 86. Si l_1 y l_2 son paralelas,

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}.$$

y, recíprocamente, si $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$, l_1 y l_2 son paralelas. La demostración es consecuencia inmediata de propiedades elementales de la semejanza de triángulos y la dejamos como ejercicio al lector.

2. Demostración del teorema de Desargues en el plano.—Vamos a dar ahora la demostración de que los triángulos ABC y $A'B'C'$ de un plano, situados como en la figura 72, en los que las rectas determi-

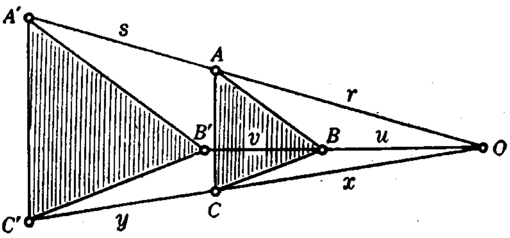

FIG. 87.—Demostración del teorema de Desargues.

nadas por vértices correspondientes concurren en un mismo punto, tienen las intersecciones P, Q y R de los lados correspondientes en línea recta. Para ello, proyectemos primero la figura de modo que Q y R pasen a ser puntos del infinito. Después de la proyección, AB será paralela a $A'B'$ y AC lo será a $A'C'$, con lo cual la figura aparecerá según se ve en la figura 87. Como ya antes hemos indicado, para demostrar el teorema de Desargues en general, basta hacerlo sobre este tipo especial de figura. Para nuestro objeto necesitamos sólo probar que la intersección de BC y $B'C'$ es también un punto del infinito; es decir, que BC es paralela a $B'C'$; entonces, P, Q y R serán colineales (ya que estarán en la recta del infinito). Ahora bien:

$$AB \parallel A'B' \text{ implica } \frac{u}{v} = \frac{r}{s},$$

y

$$AC \parallel A'C' \text{ implica } \frac{x}{y} = \frac{r}{s}$$

Por consiguiente, $u/v = x/y$, lo que supone $BC \parallel B'C'$, como queríamos probar.

Observemos que en esta demostración del teorema de Desargues hacemos uso de la noción de longitud de un segmento; es decir, que hemos demostrado un teorema proyectivo con medios métricos. Además, si las transformaciones proyectivas se definen «intrínsecamente» como transformaciones planas que conservan la razón doble (véase pág. 189), entonces la demostración se efectúa por completo en el plano.

Ejercicio: Demuéstrese, en forma análoga, el recíproco del teorema de Desargues: si los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen la propiedad de que P, Q y R son colineales, las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes.

3. Teorema de Pascal[1].—Este teorema dice: *si los vértices de un hexágono están alternativamente sobre un par de rectas concurrentes, las tres intersecciones* P, Q *y* R *de los lados opuestos son colineales* (Fig. 88). (El hexágono puede cortarse a sí mismo.) Los lados «opuestos» se identifican en el diagrama esquemático de la figura 89.

Mediante una proyección preliminar, supondremos que P y Q son puntos del infinito. Necesitamos probar, pues, que también R está en el infinito. La disposición está aclarada en la figura 90, en la que $23 \parallel 56$ y $12 \parallel 45$. Para probar que $16 \parallel 34$, tenemos

$$\frac{a}{a+x} = \frac{b+y}{b+y+s}, \qquad \frac{b}{b+y} = \frac{a+x}{a+x+r}$$

Por consiguiente,

$$\frac{a}{b} = \frac{a+x+r}{b+y+s},$$

es decir, $16 \parallel 34$, como queríamos demostrar.

[1] Más adelante (pág. 221) discutiremos un teorema más general del mismo tipo. El presente caso especial se conoce también por el nombre de su descubridor, Pappus de Alejandría (siglo III a. de J. C.).

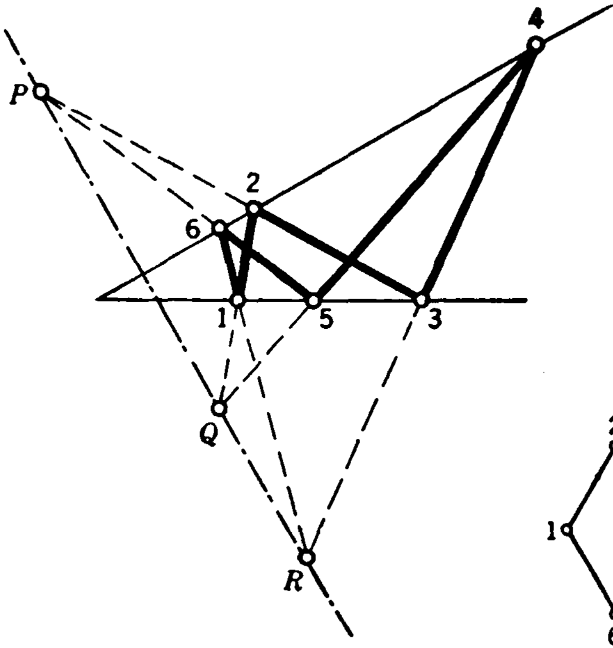

FIG. 88.—Configuración de Pascal.

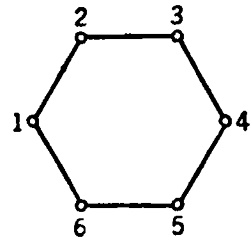

FIG. 89.

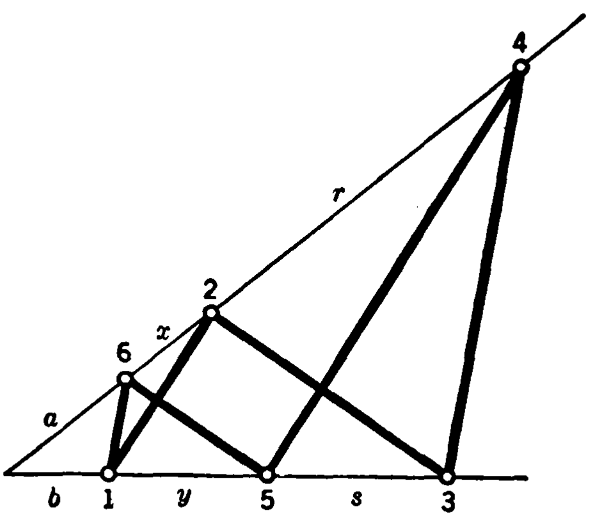

FIG. 90.—Demostración del teorema de Pascal.

4. Teorema de Brianchon.—Este teorema dice: *si los lados de un hexágono pasan alternativamente por dos puntos fijos* P *y* Q, *las tres diagonales que unen pares de vértices opuestos del hexágono son concu-*

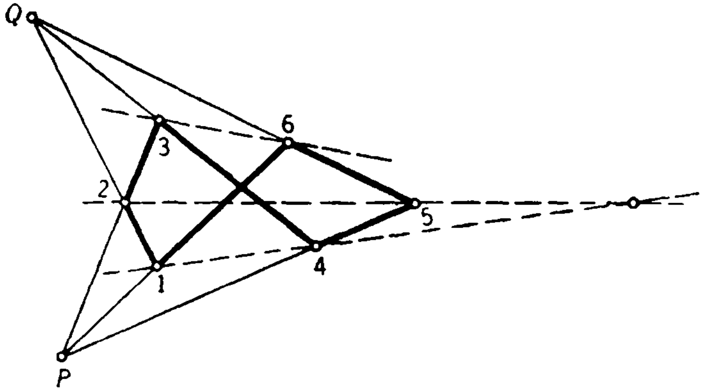

FIG. 91.—Configuración de Brianchon.

rrentes (véase Fig. 91). Mediante una proyección podemos llevar al infinito el punto P y el punto en que se cortan dos diagonales, p. ej., 14 y 36 (véase Fig. 92). Como 14 $\parallel$ 36, se tiene $a/b = u/v$. Pero $x/y = a/b$ y $u/v = r/s$; por consiguiente, $x/y = r/s$ y 36 $\parallel$ 25; es decir, las tres

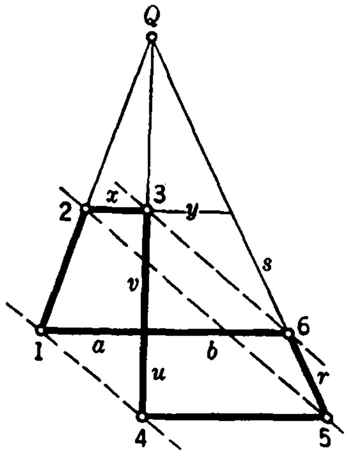

FIG. 92.—Demostración del teorema de Brianchon.

diagonales son paralelas y, por tanto, concurrentes. Esto basta para probar el teorema en el caso general.

5. Nota sobre la ley de dualidad.—El lector habrá observado la notable analogía entre los teoremas de Pascal (1623-1662) y de Brianchon (1785-1864). Esta semejanza resulta particularmente sorprendente si escribimos los teoremas uno al lado del otro.

TEOREMA DE PASCAL	TEOREMA DE BRIANCHON
Si los *vértices* de un hexágono *están alternativamente sobre dos rectas*, los *puntos en que se cortan los lados opuestos* son *colineales*.	Si los *lados* de un hexágono *pasan alternativamente por* dos *puntos*, las *rectas que unen vértices opuestos* son *concurrentes*.

No sólo los teoremas de Pascal y Brianchon, sino todos los teoremas de geometría proyectiva se presentan a pares, análogos uno a otro y, por decirlo así, idénticos en estructura. Esta relación se llama *dualidad*. En geometría plana el punto y la recta se denominan *elementos duales*. Trazar una recta que pase por un punto, o señalar un punto sobre una recta, son *operaciones duales*. Dos figuras son duales si una puede deducirse de la otra reemplazando cada elemento y operación por el elemento y operación duales; p. ej., los teoremas de Pascal y Brianchon son duales, y el dual del teorema de Desargues es precisamente su recíproco. Este fenómeno de la dualidad da a la geometría proyectiva un carácter muy distinto al que tiene la geometría métrica elemental, en la cual no existe tal dualidad (p. ej., carece de significado hablar del dual de un ángulo de 37° o de un segmento de longitud 2). En muchos textos de geometría proyectiva *el principio de dualidad*, que dice que *el dual de todo teorema verdadero de geometría proyectiva es asimismo un teorema verdadero de geometría proyectiva*, se pone de manifiesto colocando los teoremas duales junto con sus demostraciones duales en columnas paralelas de cada página, según hemos hecho anteriormente. La razón básica de esta dualidad será considerada en la sección siguiente (véase también pág. 229).

VI. REPRESENTACIÓN ANALÍTICA

1. Observaciones preliminares.—En el desarrollo inicial de la geometría proyectiva existió una acusada tendencia a construirlo todo sobre una base sintética y *puramente geométrica*, evitando el uso de números y métodos algebraicos. Este programa tropezó con grandes dificultades, ya que siempre quedaban puntos donde parecía inevitable alguna formulación algebraica. Hacia los últimos años del siglo XIX se consiguió, no obstante, éxito completo en la construcción de una geometría proyectiva puramente sintética, pero a costa de gran complicación. En este sentido, los métodos de la geometría analítica han tenido mucho más éxito. La tendencia general en la matemática moderna es basarlo todo en el concepto de número; y, en geometría, esta tendencia, iniciada con Fermat y Descartes, ha obtenido triunfos decisivos. La geometría analítica se ha desarrollado desde el estadio de un mero instrumento de razonamiento geométrico hasta constituir una disciplina en la que la interpretación geométrica intuitiva de las operaciones y resultados no es ya el fin último y exclusivo, sino que tiene más bien la función de ser un principio director que ayuda a sugerir y comprender los resultados analíticos. Este cambio en el significado de la geometría es el producto de un desarrollo histórico gradual que ha ampliado enormemente el objeto de la geometría clásica, y que, al propio tiempo, ha producido una unión casi orgánica de la geometría y el análisis.

En geometría analítica, las «coordenadas» de un ente geométrico son un conjunto de números que caracterizan a dicho objeto unívocamente; p. ej., un punto se define dando sus coordenadas rectangulares x, y o sus coordenadas polares ρ, θ, mientras un triángulo puede definirse por las coordenadas de sus tres vértices, lo que requiere en total seis números. Sabemos que una recta en el plano x, y es el lugar geométrico de todos los puntos $P\ (x, y)$ (véase pág. 83 para esta notación) cuyas coordenadas satisfacen a una ecuación lineal:

$$ax + by + c = 0. \qquad [1]$$

Podremos, por consiguiente, designar los tres números a, b, c como las «coordenadas» de esta recta; p. ej., $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ definen la recta $y = 0$, que es el eje x; $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ definen la recta $x=y$, que es la bisectriz del primer cuadrante. Del mismo modo, las ecuaciones cuadráticas definen «secciones cónicas»:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{circunferencia de centro en el origen y radio } r;$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad \text{circunferencia de centro en } (a, b) \text{ y radio } r;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{elipse,}$$

etcétera.

El método que se ofrece como más natural en geometría analítica es partir de conceptos puramente «geométricos»—puntos, rectas, etc.—

y traducirlos al lenguaje de los números. El punto de vista moderno es el recíproco: partimos del *conjunto de todos los pares de números* (x, y), y *llamamos* punto a cada uno de dichos pares, ya que podemos, si es nuestro deseo, *interpretar* cada par de números por la noción familiar de punto geométrico. Análogamente, una ecuación lineal entre x e y se dice que define una recta. El haber transferido la atención principal del aspecto intuitivo de la geometría al analítico abre el camino para un tratamiento sencillo, aunque riguroso, de los puntos del infinito de la geometría proyectiva, lo que es indispensable para una comprensión más profunda y completa de todo el tema. Para aquellos lectores que posean suficientes conocimientos preliminares, daremos una breve descripción de este método.

***2. Coordenadas homogéneas. Fundamento algebraico de la dualidad.**—En geometría analítica ordinaria, las coordenadas rectangulares de un punto del plano son sus distancias (con su correspondiente signo) a un par de ejes perpendiculares. El sistema falla cuando se consideran los puntos del infinito del plano ampliado de la geometría proyectiva. Por tanto, si deseamos aplicar los métodos analíticos a la geometría proyectiva, es necesario idear un sistema de coordenadas que comprenda tanto a los puntos ideales como a los ordinarios. La introducción de tal sistema de coordenadas se describe mejor suponiendo que el plano X, $Y(\pi)$ dado está «sumergido» en un espacio tridimensional, en el que se ha definido un sistema de coordenadas rectangulares x, y, z (o distancias afectadas de signo de un punto a los tres planos coordenados determinados por los ejes x, y, z). Coloquemos π paralelamente al plano coordenado x, y, y a una distancia 1 por encima de él, de forma que todo punto P de π tendrá coordenadas tridimensionales $(X, Y, 1)$. Tomando el origen O del sistema de coordenadas como centro de proyección, observemos que *cada punto* P *determina una única recta que pasa por* O, *y recíprocamente* (véase página 196. Las rectas que pasan por O y son paralelas a π corresponden a los puntos del infinito de π).

Vamos a describir ahora un sistema de «coordenadas homogéneas» para los puntos de π. Para hallar las coordenadas homogéneas de un punto ordinario P de π, consideramos la recta que une O con P y elegimos en ella *un* punto Q distinto del O (véase la Fig. 93). Entonces, las coordenadas tridimensionales x, y, z de Q son las *coordenadas homogéneas* de P. En particular, las coordenadas $(X, Y, 1)$ de P mismo constituyen un conjunto de coordenadas homogéneas de P. Además, cualquier otro conjunto de números (tX, tY, t) con $t \neq 0$ será también un conjunto de coordenadas homogéneas de P, ya que las coordenadas de todos los puntos de la recta OP, excepto el O, serán de esta forma. [Excluímos el punto (0, 0, 0), que por estar en todas las rectas que pasan por O, no sirve para distinguir una de otra.]

Este método de definir coordenadas en el plano requiere tres números en lugar de dos para determinar la posición de un punto, y tiene la desventaja adicional de que las coordenadas de un punto no están determinadas unívocamente, sino que incluyen un factor arbitrario t. Pero ofrece la gran ventaja de que los puntos del infinito de π están ahora incluídos en la representación coordenada. Un punto P del infinito de π se determina mediante una recta que pasa por O

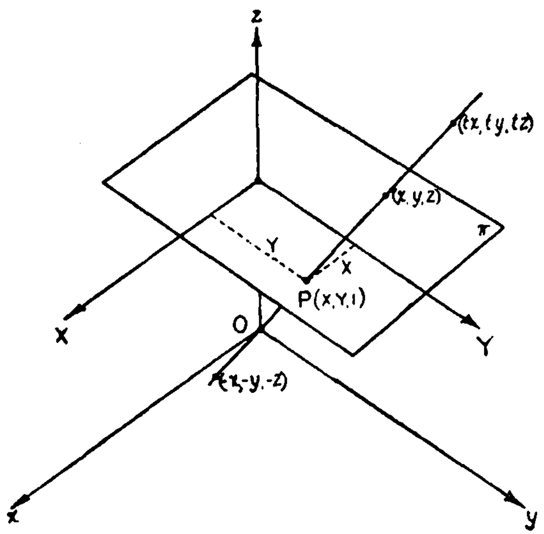

FIG. 93.—Coordenadas homogéneas.

y es paralela a π. Todo punto Q de esta recta tendrá coordenadas de la forma $(x, y, 0)$; por consiguiente, *las coordenadas homogéneas de un punto del infinito de π son de la forma* (x, y, 0).

La ecuación en coordenadas homogéneas de una recta de π puede hallarse inmediatamente, observando que las rectas que unen O con los puntos de esta recta están en un plano que pasa por O. Se demuestra en geometría analítica que la ecuación de tal plano es de la forma

$$ax + by + cz = 0.$$

Por tanto, esta es la ecuación en coordenadas homogéneas de una recta de π.

Ahora que el modelo geométrico de los puntos de π como rectas que pasan por O ha cumplido su propósito, podemos dejarlo de lado y dar la siguiente definición, puramente analítica, del plano ampliado:

Un *punto* es una terna ordenada de números reales (x, y, z), no todos iguales a cero. Dos de tales ternas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) definen el *mismo* punto, si para algún $t \neq 0$ es:

$$x_2 = tx_1\,,\quad y_2 = ty_1\,,\quad z_2 = tz_1\,.$$

En otras palabras, las coordenadas de un punto cualquiera pueden multiplicarse por un factor no nulo sin que varíe el punto. (Por esta razón se llaman coordenadas *homogéneas*.) Un punto (x, y, z) es un punto *ordinario* si $z \neq 0$; si $z = 0$, es un *punto del infinito*.

Una *línea recta* de π consta de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen a una ecuación lineal de la forma

$$ax + by + cz = 0, \qquad [1']$$

siendo a, b, c tres constantes no todas nulas. En particular, los puntos del infinito de π satisfacen todos a la ecuación lineal

$$z = 0. \qquad [2]$$

Ésta es, por definición, una recta llamada *recta del infinito* de π. Como una recta se define por una ecuación de la forma [1′], podemos llamar a la terna de números (a, b, c) *coordenadas homogéneas de la recta* [1′]. Sigue de ello que (ta, tb, tc), para cualquier $t \neq 0$, son también las coordenadas de la recta [1′], ya que la ecuación

$$(ta)x + (tb)y + (tc)z = 0 \qquad [3]$$

se satisface para las mismas ternas de coordenadas (x, y, z) que [1′].

En estas definiciones observamos una simetría perfecta entre punto y recta; cada uno de estos elementos está determinado por tres coordenadas homogéneas (u, v, w). La condición para que el punto (x, y, z) esté en la recta (a, b, c) es que

$$ax + by + cz = 0,$$

y ésta es asimismo la condición para que el punto cuyas coordenadas son (a, b, c) esté en la recta de coordenadas (x, y, z); p. ej., la identidad aritmética

$$2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 0$$

puede interpretarse tanto como que el punto (3, 4, 2) está en la recta (2, 1, —5) como que el punto (2, 1, —5) está en la recta (3, 4, 2). Esta simetría es la base de la dualidad entre punto y recta en geometría proyectiva, pues toda relación entre puntos y rectas se transforma en otra entre rectas y puntos cuando las coordenadas son adecuadamente reinterpretadas. En la nueva interpretación, las coordenadas anteriores de puntos y rectas deberán imaginarse ahora como representando rectas y puntos, respectivamente. Todas las operaciones algebraicas y resultados se conservan, pero su interpretación da la réplica dual del teorema original. Merece destacarse el hecho de que esta dualidad no se cumple en el plano ordinario de dos coordenadas X, Y, ya que la ecuación de una recta en coordenadas ordinarias

$$aX + bY + c = 0$$

no es simétrica respecto a X, Y y a, b, c. Sólo mediante la introducción de los puntos y de la recta del infinito queda perfectamente establecido el principio de dualidad.

Para pasar de las coordenadas homogéneas x, y, z de un punto ordinario P del plano π a las coordenadas rectangulares ordinarias, hacemos simplemente $X = x/z$, $Y = y/z$. Entonces, X, Y representan las distancias desde el punto P a dos ejes perpendiculares de π, paralelos a los ejes x e y, según se indica en la figura 93. Sabemos que una ecuación de la forma

$$aX + bY + c = 0$$

representa una recta de π. Al efectuar la sustitución $X = x/z$, $Y = y/z$ y multiplicar por z encontramos que la ecuación de la misma recta en coordenadas homogéneas es, como se ha dicho en la página anterior,

$$ax + by + cz = 0.$$

Por ejemplo, la ecuación de la recta $2x - 3y + z = 0$ es, en coordenadas rectangulares ordinarias, X, Y, $2X - 3Y + 1 = 0$. Naturalmente, la última ecuación falla para el punto del infinito de la recta, una de cuyas ternas de coordenadas homogéneas es (3, 2, 0).

Queda aún algo por decir: hemos conseguido dar una definición puramente analítica de punto y recta; pero ¿cómo obtener el concepto igualmente importante de transformación proyectiva? Puede demostrarse que una transformación proyectiva de un plano sobre otro, tal como se definió en la página 181, está dada analíticamente por un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z, \end{aligned} \tag{4}$$

que relaciona las coordenadas homogéneas x', y', z' de los puntos del plano π' con las coordenadas homogéneas x, y, z de los puntos del plano π. Desde nuestro punto de vista actual, podemos ahora *definir* una transformación proyectiva mediante un sistema de ecuaciones lineales de la forma [4]. Los teoremas de la geometría proyectiva se transforman, por consiguiente, en teoremas sobre el comportamiento de las ternas de números (x, y, z) bajo tales transformaciones; p. ej., la demostración de que la razón doble de cuatro puntos de una recta no varía al aplicar dichas transformaciones, es simplemente un ejercicio del álgebra de las transformaciones lineales. No entramos en los detalles de este procedimiento analítico, y volveremos, en cambio, a los aspectos más intuitivos de la geometría proyectiva.

VII. PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN CON LA REGLA

En las construcciones siguientes se entiende que sólo se admite la regla como instrumento.

Los problemas 1 a 18 están contenidos en una memoria de J. Steiner, en la cual prueba que puede prescindirse del compás en las construcciones geométricas cuando se da una circunferencia fija y su centro (véase Cap. III, pág. 163). Se aconseja al lector que resuelva los problemas en el orden dado.

Una cuaterna de rectas a, b, c, d que pasan por un punto P se llama *armónica* si su razón doble $(abcd)$ es igual a -1; a y b se dicen *conjugados* de c y d, y viceversa.

1. Demuéstrese que si en una cuaterna armónica de rectas a, b, c, d, el rayo a es bisectriz del ángulo formado por c y d, b es entonces perpendicular a a.

2. Constrúyase el cuarto rayo armónico de una terna dada de rectas que pasan por un punto. (*Indicación:* Hágase uso del teorema del cuadrilátero completo.)

3. Constrúyase el cuarto punto armónico de una terna de puntos colineales dados.

4. Se dan un ángulo recto y un ángulo arbitrario que tienen el vértice y un lado comunes; duplíquese este ángulo.

5. Se da un ángulo y su bisectriz b. Constrúyase una perpendicular a b por el vértice del ángulo dado.

6. Demuéstrese que si las rectas $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$, que pasan por un punto P, cortan a la recta a en los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y a la recta b en los $B_1, B_2, \ldots, B_n$, todas las intersecciones de los pares de rectas A_iB_k y A_kB_i $(i \neq k;\ i,k = 1, 2, \ldots, n)$ están sobre una recta.

7. Demuéstrese que si una paralela al lado BC del triángulo ABC corta a AB en B' y a AC en C', la recta que une A con la intersección D de $B'C$ y $C'B$ corta a BC en su punto medio.

7*a*. Formúlese el recíproco de 7.

8. Sobre una recta l se dan tres puntos, P, Q, R, tales que Q es el punto medio del segmento PR. Constrúyase una paralela a l que pase por un punto dado S.

9. Dadas dos rectas paralelas, l_1 y l_2, hállese el punto medio de un segmento AB de l_1.

10. Trácese una paralela a dos rectas paralelas dadas l_1 y l_2 y que pase por un punto dado P. (*Indicación:* Redúzcase 9 a 7 y úsese 8.)

11. Steiner da la solución siguiente al problema de duplicar un segmento rectilíneo AB, cuando se da una paralela l a AB: por un punto C, que no está en l ni en AB, se traza CA, que corta a l en A_1, y CB, que corta a l en B_1. Dibújese entonces (véase 10) una paralela a l que pase por C, la cual cortará a BA_1 en D. Si DB_1 encuentra a AB en E, $AE = 2 \cdot AB$. Demuéstrese esto último.

12. Divídase el segmento AB en n partes iguales, si se tiene trazada una paralela l a AB. (*Indicación:* Constrúyase primero el múltiplo n-ésimo de un segmento arbitrario de l, por medio de 11.)

13. Dado un paralelogramo $ABCD$, trácese por un punto P una paralela a una recta dada l. (*Indicación:* Aplíquese 10 al centro del paralelogramo y úsese 8.)

14. Dado un paralelogramo, multiplíquese un segmento dado por n. (*Indicación:* Úsense 13 y 11.)

15. Dado un paralelogramo, divídase un segmento dado en n partes.

16. Se da una circunferencia y su centro; trácese una paralela a una recta dada desde un punto dado. (*Indicación:* Utilícese 13.)

17. Dados un círculo y su centro, multiplíquese y divídase un segmento dado por n. (*Indicación:* Utilícese 13.)

18. Se da una circunferencia fija y su centro; trácese una perpendicular a una recta dada por un punto dado. (*Indicación:* Úsese un rectángulo inscrito en la circunferencia y que tenga dos lados paralelos a la recta dada; redúzcase a ejercicios anteriores.)

19. Utilizando los resultados de los problemas 1 a 18, ¿cuáles son los problemas básicos de construcción que pueden resolverse sin otro instrumento que una regla con dos bordes paralelos?

20. Dos rectas dadas, l_1 y l_2, se cortan en un punto P *fuera* de los límites del papel. Constrúyase la recta que une un punto Q con P. (*Indicación:* Complétese con los elementos dados la figura del teorema de Desargues para el plano, de forma que P y Q sean intersecciones de lados correspondientes de dos triángulos del teorema de Desargues.)

21. Constrúyase la recta que une dos puntos dados cuya distancia es mayor que la longitud de la regla utilizada (véase 20).

22. Dos puntos P y Q, fuera de los límites del papel, están determinados por dos pares de rectas l_1, l_2 y m_1, m_2, respectivamente. Dibújese el segmento de la recta PQ que cae dentro del papel. (*Indicación:* Para obtener un punto de PQ, complétese la figura del teorema de Desargues, de manera que un triángulo tenga dos lados sobre l_1 y m_1 y los correspondientes del otro estén sobre l_2 y m_2.)

23. Resuélvase 20 por medio del teorema de Pascal (pág. 200). (*Indicación:* Complétese la figura correspondiente al teorema de Pascal considerando l_1 y l_2 como un par de lados opuestos del hexágono y Q como intersección de otro par de lados opuestos.)

*24. Dos rectas por completo fuera del papel están determinadas cada una por dos pares de rectas que se cortan en puntos exteriores al papel. Determínese el punto de intersección por medio de otro par de rectas que pasen por él.

VIII. CÓNICAS Y CUÁDRICAS

1. Geometría métrica elemental de las cónicas.—Hasta ahora nos hemos ocupado exclusivamente de puntos, rectas, planos y figuras formadas por combinaciones de estos entes. Si la geometría proyectiva consistiera únicamente en el estudio de esas figuras «lineales», tendría relativamente poco interés. Es un hecho de importancia fundamental que la geometría proyectiva *no* se limita al estudio de las figuras lineales, sino que incluye también todo el campo de las secciones cónicas y sus generalizaciones a más de tres dimensiones. El estudio métrico de Apolonio de las tres secciones cónicas—elipse, hipérbola y parábola—fué uno de los grandes triunfos de la matemática de la antigüedad. Es difícil exagerar la importancia de las secciones cónicas tanto en la matemática pura como en la aplicada (p. ej., las órbitas de los planetas y las de los electrones en el átomo de hidrógeno son secciones cónicas). No debe extrañarnos que la teoría clásica griega de las secciones cónicas sea todavía parte indispensable de la enseñanza matemática, pero de ninguna manera puede considerarse la matemática griega como algo definitivo. Dos mil años más tarde se descubrieron las importantes propiedades proyectivas de las cónicas, y a pesar de su sencillez y belleza, la inercia académica ha impedido hasta ahora que se introduzcan en los programas de la segunda enseñanza.

Vamos a empezar recordando las definiciones métricas de las secciones cónicas. Existen varias de estas definiciones cuya equivalencia se demuestra en geometría elemental. La usual parte del concepto de *focos*. Se define una *elipse* como el lugar geométrico de todos los puntos P del plano tales que la suma de sus distancias, r_1 y r_2, a dos puntos fijos, F_1 y F_2, llamados focos, es constante. (Si ambos focos coinciden, la figura es una circunferencia.) La *hipérbola* se define como el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el valor absoluto de la diferencia $r_1 - r_2$ es igual a una constante prefijada. Y, finalmente, se define la *parábola* como el lugar geométrico de todos los puntos P del plano para los cuales la distancia r a un punto fijo F es igual a la distancia a una recta dada l.

En geometría analítica todas estas curvas pueden expresarse mediante ecuaciones de segundo grado entre las coordenadas x e y. No es difícil demostrar, recíprocamente, que cualquier curva definida analíticamente por una ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

es una recta, o un par de rectas, o una de las tres cónicas. Esto se demuestra, generalmente, introduciendo un sistema nuevo de coordenadas más adecuado, como puede verse en cualquier curso de geometría analítica.

Estas definiciones de las secciones cónicas son esencialmente métricas, puesto que hacen uso del concepto de «distancia». Pero existe otra definición que establece el lugar que ocupan las secciones cónicas en la geometría proyectiva. *Las secciones cónicas son simplemente proyecciones de una circunferencia sobre un plano.* Si proyectamos una circunferencia C desde un punto O, todas las rectas proyectantes formarán un doble cono indefinido, cuya intersección con un plano π será la proyección de C. Esta intersección será una elipse o una hipérbola, según que el plano corte a una o a ambas hojas del cono. El caso intermedio de la parábola aparece cuando π es paralelo a una de las rectas que pasan por O (Fig. 94).

Este cono de proyección no precisa ser circular recto con su vértice O en la perpendicular levantada sobre el centro del círculo C; puede ser también oblicuo. En cualquier caso, y por ahora lo aceptaremos sin demostración, la intersección de un cono con un plano

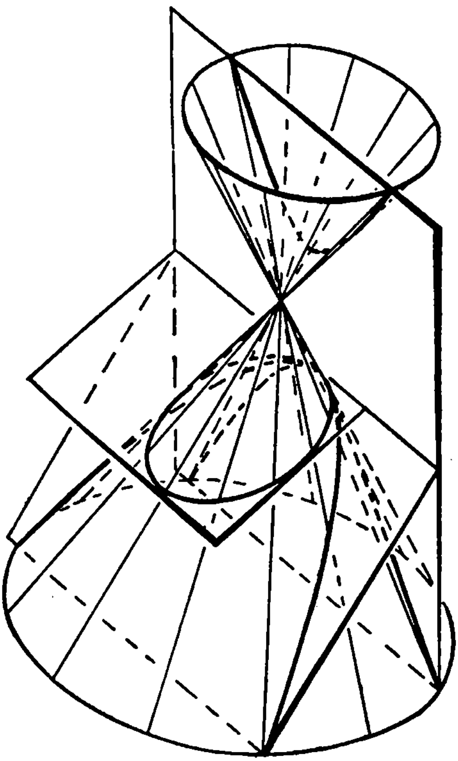

Fig. 94.—Secciones cónicas.

es una curva cuya ecuación es de segundo grado; recíprocamente, toda curva de segundo grado puede deducirse de una circunferencia por proyección. Por esta razón, las curvas de segundo grado se llaman secciones cónicas.

Hemos dicho que cuando el plano corta sólo a una hoja de un cono circular recto, la curva de intersección E es una elipse. Podemos demostrar que E satisface la definición focal ordinaria de la elipse, tal como se ha dado antes, mediante una elegante argumentación debida al matemático belga G. P. Dandelin, quien la enunció en 1822. La

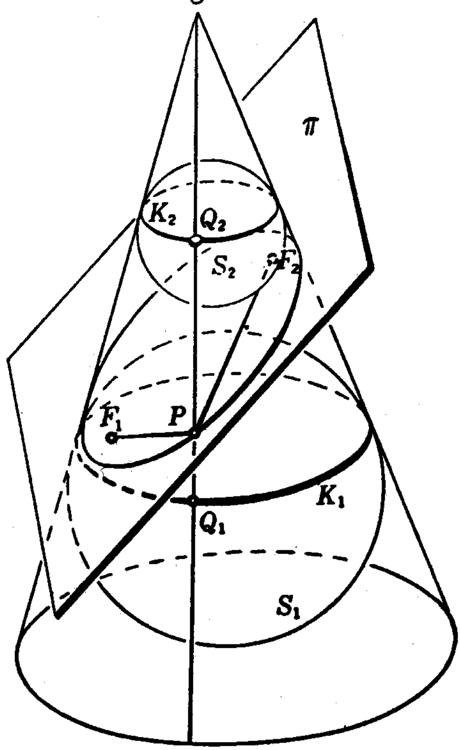

FIG. 95.—Esferas de Dandelin.

demostración se basa en la introducción de dos esferas S_1 y S_2 (Fig. 95), que son tangentes a π en los puntos F_1 y F_2, respectivamente, y tangentes al cono a lo largo de dos circunferencias situadas en planos paralelos K_1 y K_2, respectivamente. Unamos un punto cualquiera P de E con F_1 y F_2, y tracemos la recta que une P con el vértice O del cono. Esta recta es una generatriz de la superficie cónica y encuentra a las circunferencias K_1 y K_2 en los puntos Q_1 y Q_2, respectivamente. Como PF_1 y PQ_1 son dos tangentes desde P a S_1, se tiene:

$$PF_1 = PQ_1,$$

y, análogamente,

$$PF_2 = PQ_2 .$$

Sumando ambas igualdades miembro a miembro, resulta:

$$PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2 = Q_1Q_2,$$

que es precisamente la distancia, contada sobre las generatrices del cono, entre los dos círculos paralelos K_1 y K_2, por lo cual resulta independiente de la particular elección del punto P sobre E. La ecuación resultante

$$PF_1 + PF_2 = \text{constante},$$

válida para todos los puntos P de E, es, precisamente, la definición focal de la elipse. En consecuencia, E es una elipse y F_1, F_2, sus focos.

Ejercicio: Cuando un plano corta las dos hojas de un cono, la curva de intersección es una hipérbola. Demuéstrese esta propiedad, utilizando una esfera en cada una de las hojas del cono.

2. Propiedades proyectivas de las cónicas.—Basándonos en los hechos acabados de exponer, adoptaremos la siguiente definición provisional: una cónica es la proyección de una circunferencia sobre un plano. Esta definición está más de acuerdo con el espíritu de la geometría proyectiva que la definición focal ordinaria, puesto que esta última se basa por entero en la noción métrica de distancia. Ni siquiera nuestra actual definición está libre de ese defecto, ya que la «circunferencia» es un concepto de geometría métrica. En seguida daremos una definición puramente proyectiva de las cónicas.

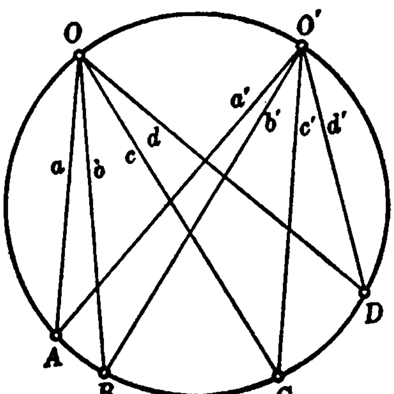

FIG. 96.—Razones dobles en una circunferencia.

Dado que nos hallamos de acuerdo con que una cónica es la proyección de una circunferencia (con la palabra «cónica» designamos cualquier curva de la clase proyectiva de la circunferencia; véase pág. 198), se deduce que cualquier propiedad de la circunferencia que permanezca invariante en la proyección será también una propiedad de las cónicas. Ahora bien: la circunferencia tiene una propiedad (métrica) muy conocida, la de que un arco dado subtiende el mismo ángulo desde todo punto O de aquélla. En la figura 96, el ángulo AOB, subtendido por el arco AB es independiente de la posición de O. Puede relacionarse este hecho con el concepto proyectivo de razón doble, considerando no dos puntos A y B, sino cuatro A, B, C, D de la circunferencia. Las cuatro semirrectas a, b, c, d, que los unen a un quinto punto O de aquélla tendrán una razón doble (a, b, c, d) que dependerá exclusivamente de los ángulos subtendidos por los arcos CA, CB, DA, DB. Si unimos A, B, C, D con otro punto O' de la circunferencia, obtendremos cuatro rayos a', b', c', d'. De acuerdo con la propiedad que acabamos de mencionar, ambas cuaternas de rayos serán «congruentes»[1]; o sea, tendrán la misma razón doble $(a', b', c', d') = (a, b, c, d)$. Si ahora proyectamos la circunferencia en una cónica K, obtendremos cuatro puntos sobre K que llamaremos A, B, C, D, otros dos puntos O y O' y dos cuaternas de rayos a, b, c, d y a', b', c', d'. Éstas no serán congruentes, puesto que, en general, la proyección no conserva la igualdad de los ángulos. Pero, ya que la razón doble permanece invariante en la proyección, la igualdad $(a, b, c, d) = (a', b', c', d')$ seguirá siendo válida. Esto nos conduce al teorema fundamental: *Si se unen cuatro puntos cualesquiera* A, B, C, D *de una cónica* K *con un quinto punto* O *de* K *mediante las rectas* a, b, c, d, *la razón doble* (a, b, c, d) *es independiente de la posición de* O *sobre* K (Figura 97).

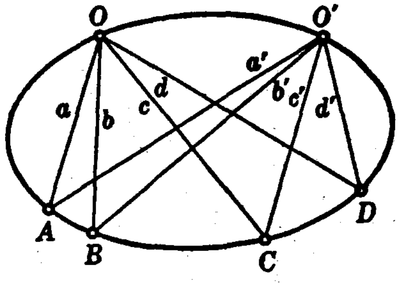

FIG. 97.—Razones dobles en una elipse.

Es éste en verdad un resultado notable; ya sabíamos que cuatro puntos cualesquiera de una recta dan lugar a la misma razón doble desde cualquier quinto punto exterior O. Este teorema sobre razones dobles es el hecho fundamental en geometría proyectiva. Vemos ahora que sigue siendo válido para cuatro puntos de una cónica, con una importante restricción; el quinto punto no puede ser uno cualquiera del plano, aunque puede moverse libremente sobre la cónica dada.

No es difícil probar el teorema recíproco, que aparece en la siguiente

[1] Una cuaterna de rayos, a, b, c, d, se dice congruente con otra a', b', c', d', si el ángulo de cada par de rayos de la primera cuaterna es igual y tiene el mismo sentido que el correspondiente en la segunda cuaterna.

forma: si dos puntos O y O' de una curva K son tales que cualquier cuaterna de puntos A, B, C, D de K tiene la misma razón doble, tanto desde O como desde O', K es una cónica (y, en consecuencia, A, B, C, D tienen la misma razón doble desde un tercer punto cualquiera O'' de K). Omitimos la demostración.

Estas propiedades proyectivas de las cónicas sugieren un método general para construirlas. Llamaremos *haz de rectas* al conjunto de todas las rectas de un mismo plano que pasan por un punto O. Consideremos ahora dos haces de vértices O y O', elegidos sobre la cónica K. Podemos establecer una correspondencia biunívoca entre las rectas del haz O y las del haz O', haciendo corresponder a toda recta a de O, otra a' de O', siempre que a y a' se corten en un punto A de la cónica K. Entonces, cuatro rayos cualesquiera a, b, c, d del haz O tendrán la misma razón doble que los cuatro rayos correspondientes a', b', c', d' de O'. Cualquier correspondencia biunívoca entre dos haces de rectas, que tenga esta propiedad, se llama *correspondencia proyectiva*. (Evidentemente, esta definición es dual de la dada en la pág. 190 para la correspondencia proyectiva entre los puntos de dos rectas.) Se dice que dos haces están relacionados proyectivamente cuando se establece entre ellos una correspondencia proyectiva; con esta definición podemos afirmar ahora que la cónica K es el lugar geométrico de las intersecciones de los rayos correspondientes de dos haces relacionados proyectivamente. Este teorema nos procura la base para una definición puramente proyectiva de las cónicas: *Una cónica es el lugar geométrico de las intersecciones de los rayos correspondientes de dos haces relacionados proyectivamente*[1]. Es tentador seguir el camino hacia la teoría de las cónicas que nos abre esta definición, pero nos limitaremos a unas pocas observaciones.

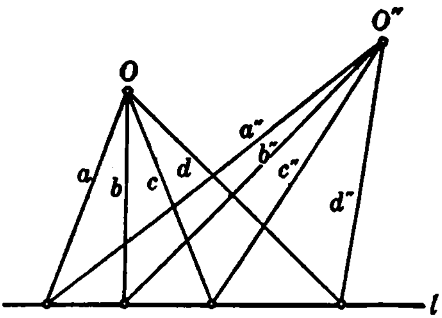

FIG. 98.—Construcción de haces relacionados proyectivamente.

Pueden obtenerse pares de haces, relacionados proyectivamente, de la manera siguiente: proyectemos todos los puntos P de una recta l desde dos centros diferentes O y O''; en los haces proyectantes esta-

[1] Este lugar puede degenerar, en determinadas circunstancias, en una recta (véase figura 98).

blezcamos una correspondencia entre las rectas a y a'' que se cortan sobre l. Ambos haces estarán entonces relacionados proyectivamente. Tomemos ahora el haz O'' y transportémoslo rígidamente a cualquier otra posición O'; el haz resultante O' estará relacionado proyectivamente con el O. Por otra parte, de esta manera puede obtenerse cualquier correspondencia proyectiva entre los haces. (Este hecho es dual del ejercicio 1, pág. 190.) Si los haces O y O' son congruentes, obtenemos una circunferencia. Si los ángulos son iguales, pero de sentido opuesto, la cónica es una hipérbola equilátera (Fig. 99).

Obsérvese que esta definición de cónica puede conducir a un lugar que es una recta, como en la figura 98. En este caso, la recta OO'' se corresponde a sí misma y se admite que todos sus puntos pertenecen

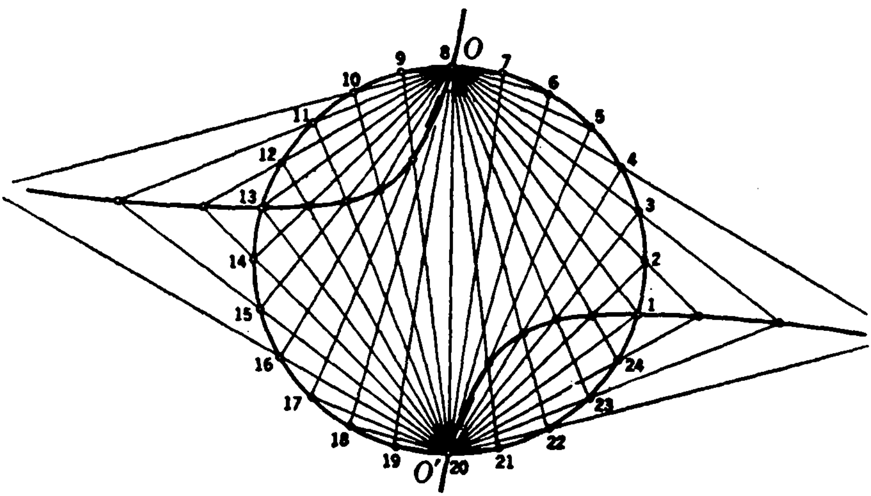

FIG. 99.—Generación de la circunferencia e hipérbola equilátera mediante haces proyectivos.

al lugar. Por tanto, la cónica degenera en un par de rectas, lo que está de acuerdo con la existencia de secciones de un cono (las obtenidas por planos que pasan por el vértice) que se componen de dos rectas.

Ejercicios:

1. Dibújense elipses, hipérbolas y parábolas mediante haces proyectivos. (Se aconseja al lector que se habitúe a estas construcciones, pues contribuirán mucho a una comprensión perfecta del tema.)

2. Dados cinco puntos O, O', A, B, C, de una cónica desconocida K, se desea determinar el punto D en el que una recta dada d, que pasa por O, corta a K. (*Indicación:* Considérense los rayos a, b, c, que pasan por O, dados mediante OA,

OB, OC, y, análogamente, los rayos a', b', c', que pasan por O'. Trácese por O el rayo d y constrúyase por O' el rayo d' tal que $(a, b, c, d) = (a', b', c', d')$. La intersección de d y d' es necesariamente un punto de K.)

3. Las cónicas como envolventes.—El concepto de tangente a una cónica pertenece a la geometría proyectiva, pues se trata de una recta que tiene con la cónica un solo punto común, propiedad que se conserva en la proyección. Las propiedades proyectivas de las tangentes a las cónicas se basan en el siguiente teorema fundamental: *la razón doble de los puntos de intersección de cuatro tangentes fijas a una cónica con una quinta tangente, es la misma para cualquier posición de esta última.*

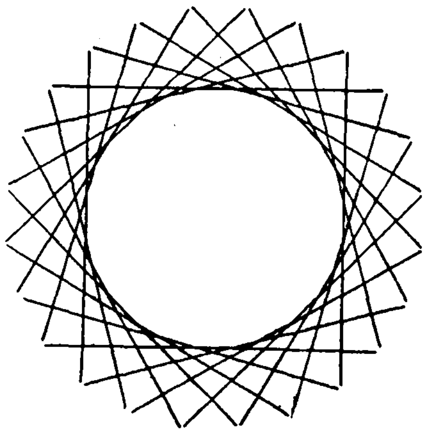

FIG. 100.—La circunferencia, definida por el conjunto de sus tangentes.

La demostración de este teorema es muy sencilla; puesto que una cónica es la proyección de una circunferencia, y dado que el teorema se refiere únicamente a propiedades que permanecen invariantes en la proyección, bastará demostrarlo para la circunferencia, y quedará así establecido en general. Para la circunferencia el teorema es sólo un problema de geometría elemental.

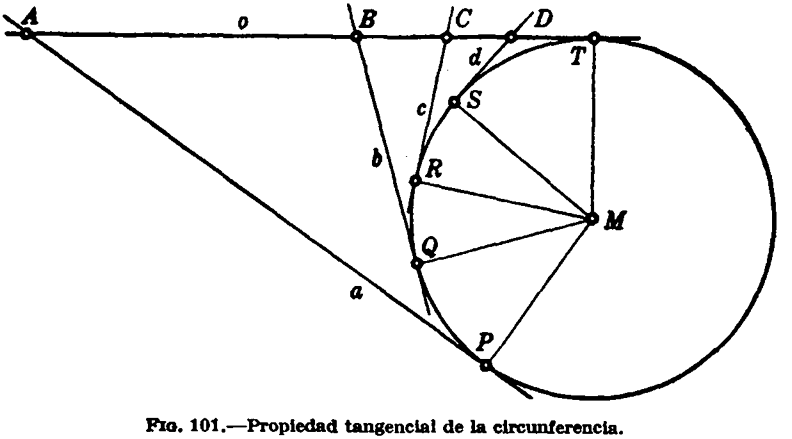

FIG. 101.—Propiedad tangencial de la circunferencia.

Sean P, Q, R, S cuatro puntos cualesquiera de una circunferencia K, siendo a, b, c, d las tangentes correspondientes. Sea T otro punto con tangente o, que corta a a, b, c, d en A, B, C, D. Si M es el centro de la circunferencia, se tendrá evidentemente que $\widehat{TMA} = {}^1/_2\, \widehat{TMP}$, siendo este último igual al ángulo subtendido por el arco TP desde un punto de K. Análogamente, $\widehat{TMB}$ es el ángulo subtendido por el arco TQ desde un punto de K. En consecuencia, $\widehat{AMB} = {}^1/_2\widehat{PQ}$, siendo ${}^1/_2\widehat{PQ}$ el ángulo subtendido por el arco PQ desde un punto de K. De ahí que los puntos A, B, C, D se proyecten desde M en cuatro

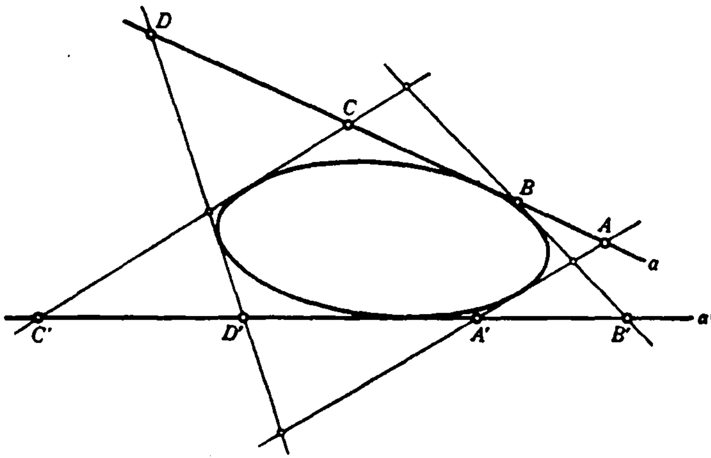

FIG. 102.—Series proyectivas de puntos sobre dos tangentes de una elipse.

rayos, cuyos ángulos están dados por las posiciones fijas de P, Q, R, S. Resulta, por tanto, que la razón doble $(ABCD)$ depende sólo de las cuatro tangentes a, b, c, d y no de la posición particular de la quinta tangente o. Éste es exactamente el teorema que queríamos demostrar.

En la sección precedente hemos visto que podía construirse una cónica mediante los puntos de intersección de las rectas correspondientes de dos haces proyectivos. El teorema que acabamos de demostrar nos permite dar la construcción dual. Sean dos tangentes a y a' de una cónica K. Otra tercera tangente t cortará a a y a' en dos puntos A y A', respectivamente. Si t se mueve sobre la cónica, quedará establecida una correspondencia $A \longleftrightarrow A'$ entre los puntos de a y los de a'; esta correspondencia es proyectiva, pues de acuerdo con nuestro teorema cuatro puntos cualesquiera de a tendrán la misma razón doble que los correspondientes de a'. Resulta de ello que una *cónica K*, considerada como el conjunto de sus tangentes, *se compone de las rectas que unen los pares de puntos correspondientes de las dos*

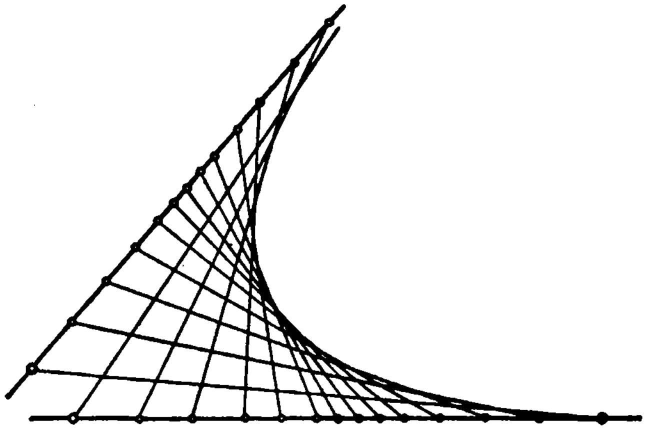

FIG. 103.—La parábola definida por series congruentes de puntos.

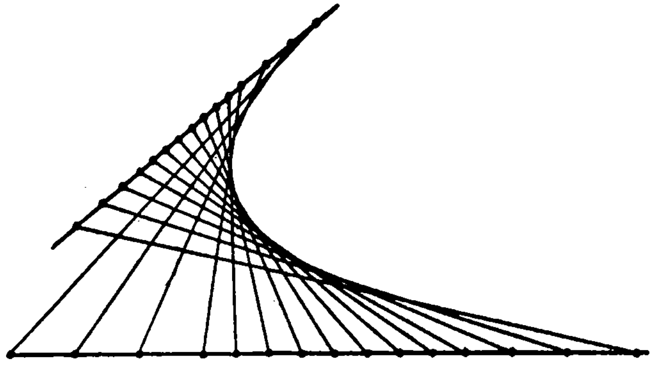

FIG. 104.—La parábola definida por series semejantes de puntos.

series[1] *de puntos proyectivos sobre* a *y* a'. Puede utilizarse esta propiedad para dar una definición proyectiva de las cónicas como «envolventes de rectas». Comparémosla con la definición proyectiva de cónica, dada en la sección precedente:

[1] El conjunto de puntos de una recta se llama *serie de puntos*. Es el concepto dual de haz de rectas.

I. Una cónica es un conjunto de *puntos*, formado por los *puntos de intersección de las rectas* correspondientes de dos *haces* proyectivos de *rayos*.

II. Una cónica es un conjunto de *rectas*, formado por las *rectas que unen los puntos* correspondientes de dos *series* proyectivas de *puntos*.

Si tomamos la tangente a una cónica en un punto cualquiera como el elemento dual del propio punto de contacto, y si consideramos una curva «envolvente» (conjunto de todas sus tangentes) como dual de una curva «puntual» (conjunto de todos sus puntos), es evidente la completa dualidad de ambas proposiciones. En la traducción de un enunciado a otro, reemplazando cada concepto por su dual, la voz «cónica» no varía; en un caso es una «cónica puntual», definida por sus puntos; en el otro, una «cónica envolvente», definida por sus tangentes (véase la Fig. 100).

Una consecuencia importante de este hecho es que el principio de dualidad de la geometría proyectiva plana, enunciado inicialmente sólo para puntos y rectas, puede ahora generalizarse hasta comprender a las cónicas. *Si, en el enunciado de un teorema cualquiera relativo a puntos, rectas y cónicas, se reemplaza cada elemento por su dual* (recordando que el dual de un punto de una cónica es la tangente a la misma) *el resultado será también cierto.* Un ejemplo de aplicación de este principio lo hallaremos en el artículo siguiente.

La construcción de las cónicas como envolventes se ilustra en las figuras 103 y 104. Si en las dos series proyectivas de puntos se corresponden entre sí los dos puntos del infinito (como debe ocurrir en series congruentes[1] o semejantes), la cónica será una parábola; el teorema recíproco es también cierto.

Ejercicio: Demuéstrese el teorema recíproco: sobre dos tangentes fijas cualesquiera de una parábola, una tangente móvil determina dos series de puntos semejantes.

4. Los teoremas generales de Pascal y Brianchon para las cónicas. Uno de los más interesantes ejemplos del principio de dualidad para las cónicas es la relación entre los teoremas generales de Pascal y Brianchon. El primero fué descubierto en 1640, y el segundo en 1806. Sin embargo, el uno es consecuencia inmediata del otro, ya que cualquier teorema que se refiera exclusivamente a cónicas, rectas y puntos sigue verificándose si se sustituye por el enunciado dual.

Los teoremas dados en las páginas 200 y 202 bajo la misma denomi-

[1] Es obvio lo que se quiere decir por correspondencia *congruente* o *semejante* entre dos series de puntos.

nación son casos especiales de los siguientes teoremas más generales:

Teorema de Pascal: Los lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica se encuentran en tres puntos alineados.

Teorema de Brianchon: Las tres diagonales que unen los vértices opuestos de un hexágono circunscrito a una cónica son concurrentes.

Es obvio que ambos teoremas son de carácter proyectivo. Su dualidad se hace evidente en cuanto se formulan como sigue:

Teorema de Pascal: Dados seis puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6, de una cónica, se unen los puntos sucesivos mediante las rectas (1, 2), (2, 3),

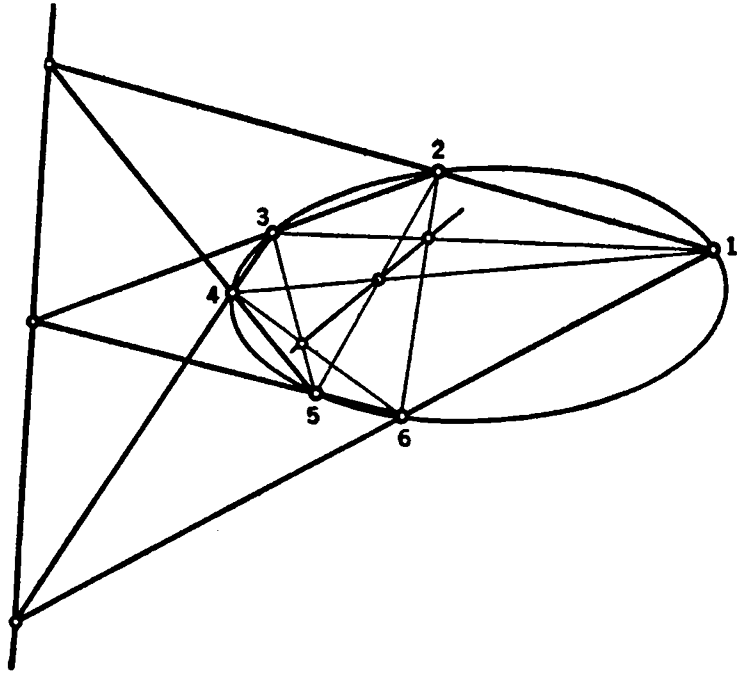

FIG. 105.—Configuración general de Pascal para dos hexágonos (1, 2, 3, 4, 5, 6) y (1, 3, 5, 2, 6, 4).

(3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 1). Si se hallan los puntos de intersección de (1, 2) con (4, 5); de (2, 3) con (5, 6), y de (3, 4) con (6, 1), dichos tres puntos de intersección se encuentran sobre una misma recta.

Teorema de Brianchon: Dadas seis tangentes 1, 2, 3, 4, 5, 6, a una cónica, se hallan los puntos de intersección de las tangentes sucesivas (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 1). Si se trazan las rectas que

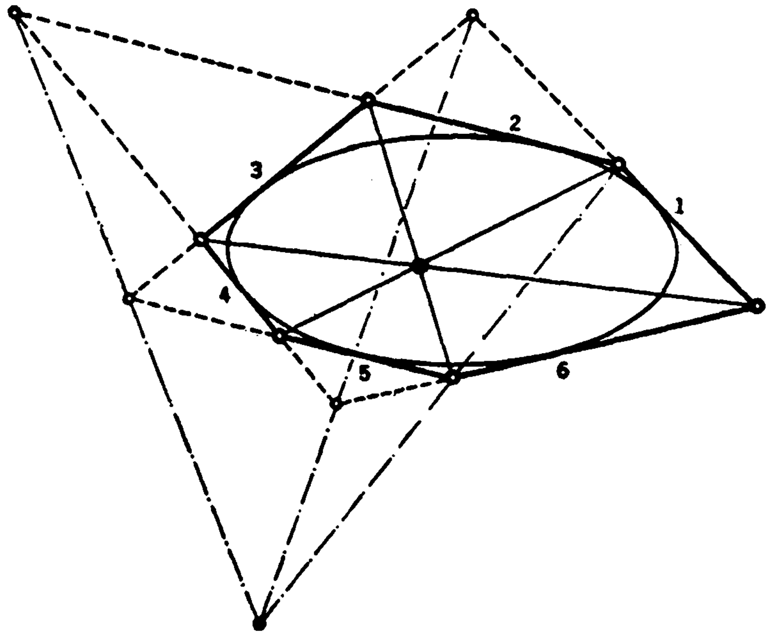

FIG. 106.—Configuración general de Brianchon, también para dos hexágonos.

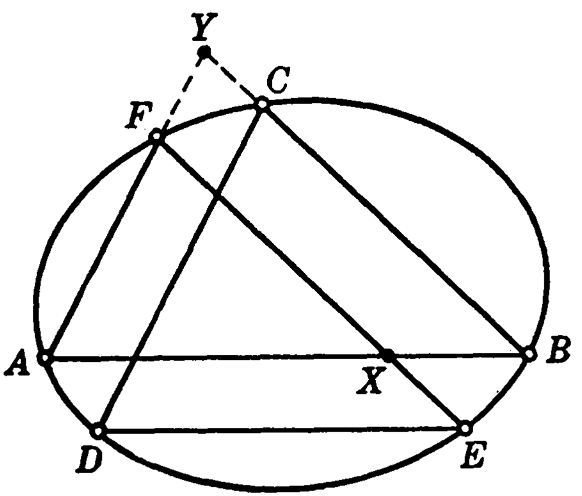

FIG. 107.—Demostración del teorema de Pascal.

unen (1, 2) con (4, 5); (2, 3) con (5, 6), y (3, 4) con (6, 1), dichas tres rectas pasan por un mismo punto.

Las demostraciones resultan de una particularización análoga a la que se utilizó en los casos degenerados. Para demostrar el teorema de Pascal, sean A, B, C, D, E, F los vértices de un hexágono inscrito en una cónica K. Mediante una proyección, podemos hacer que AB sea paralela a ED y FA paralela a CD, con lo que obtenemos la configuración representada en la figura 107. (Para mayor comodidad se ha representado el hexágono como si se cortara a sí mismo, aunque esto no es necesario.) El teorema de Pascal se reduce ahora a la sencilla proposición de que CB es paralela a FE, o dicho de otra manera, que la recta sobre la cual se hallan las intersecciones de los lados opuestos del hexágono es la recta del infinito. Para demostrarlo, consideremos los puntos F, A, B, D, que, como ya sabemos, se proyectan mediante cuatro rayos cuya razón doble es constante, k, desde cualquier otro punto de K, p. ej., desde C o desde E. Proyectemos estos puntos desde C; entonces, los rayos proyectantes cortan a AF en cuatro puntos F, A, Y, ∞, cuya razón doble es k. O sea, que $YF : YA = k$ (véase pág. 197). Si se proyectan las mismos puntos desde E sobre BA, se tiene:

$$k = (XAB\,\infty) = BX : BA.$$

Por tanto,

$$BX : BA = YF : YA,$$

con lo que queda establecido el paralelismo de YB y FX. Esto completa la demostración del teorema de Pascal.

El teorema de Brianchon se deduce, sea mediante el principio de dualidad o por un razonamiento directo dual del anterior. Será un excelente ejercicio para el lector establecer con detalle la demostración.

5. El hiperboloide.—Las figuras que corresponden en tres dimensiones a las cónicas del plano son las «cuádricas», entre las cuales la esfera y el elipsoide son casos especiales. Estas superficies ofrecen mayor variedad y su estudio resulta considerablemente más difícil que el de las cónicas. Aquí estudiaremos brevemente, y sin dar las demostraciones, una de las cuádricas más interesantes: el «hiperboloide de una hoja».

Esta superficie puede definirse de la siguiente forma: elíjanse tres rectas cualesquiera, l_1, l_2, l_3, sin ninguna particularidad en cuanto a su posición en el espacio; es decir, tales que dos cualesquiera de ellas no sean concurrentes o paralelas, ni que las tres sean paralelas a un

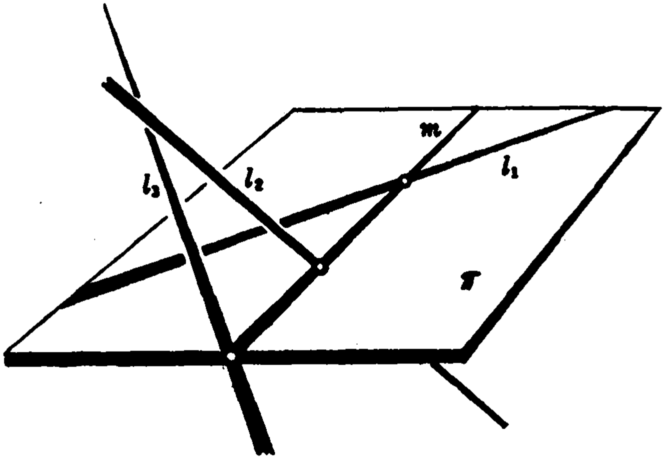

FIG. 108.—Construcción de rectas que se apoyan en tres dadas en posición general.

mismo plano. Es sorprendente que existan infinitas rectas en el espacio que se apoyan en las tres dadas. Para ver esto, tomemos un plano cualquiera π que pase por l_1. Entonces, π cortará a l_2 y l_3 en dos puntos, y la recta m que los une cortará a l_1, l_2 y l_3, engendrando una superficie indefinida, que es el hiperboloide de una hoja, el cual contiene una familia infinita de rectas de la clase m. Cualquier terna de estas rectas m_1, m_2, m_3 estará también en posición general, y todas las rectas del espacio que corten a estas tres se hallarán contenidas en la superficie del hiperboloide. Ésta es la propiedad fundamental de esta superficie: está compuesta de dos familias diferentes de rectas; cada tres de la misma familia están en posición general, mientras cada recta de una familia corta a todas las de la otra.

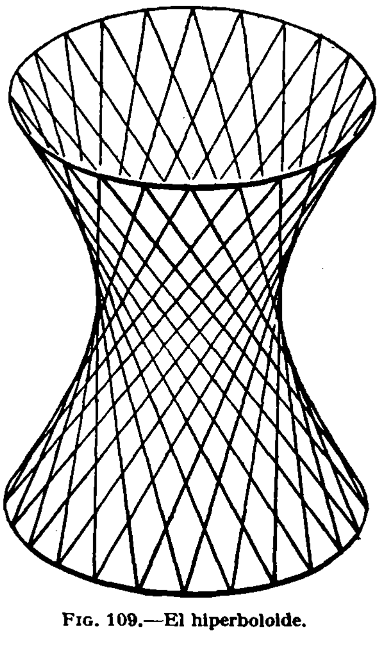

FIG. 109.—El hiperboloide.

Una importante propiedad

proyectiva del hiperboloide consiste en que la razón doble de cuatro puntos, intersecciones de cuatro rectas cualesquiera de una familia con una de la otra, es independiente de la posición de esta última. Esto se deduce directamente del método de construcción del hiperboloide mediante un plano que gira, lo que puede demostrar el lector como ejercicio.

Una de las propiedades más notables del hiperboloide es la de que, si bien contiene dos familias de rectas que se cortan, esto no hace que la superficie sea rígida. Si se construye un modelo con alambres que puedan girar libremente en los puntos de intersección, puede deformarse la figura de manera continua, adquiriendo una gran variedad de formas.

IX. AXIOMÁTICA Y GEOMETRÍA NO EUCLÍDEA

1. El método axiomático.—El método axiomático en matemáticas se remonta por lo menos a Euclides. De ningún modo es cierto que la matemática griega estuviese desarrollada o presentada exclusivamente en la forma rígida de postulados de los *Elementos*. Pero tan grande fué la impresión producida por este trabajo sobre las generaciones subsiguientes, que se transformó en un modelo para toda demostración rigurosa en matemáticas. A veces hasta los filósofos como, por ejemplo, Spinoza en su *Ethica, more geometrico demonstrata,* trató de presentar sus argumentos en forma de teoremas deducidos de definiciones y axiomas. En la matemática moderna, después de un alejamiento de la tradición euclídea durante los siglos XVII y XVIII, hubo una creciente penetración del método axiomático en todos los campos. Uno de los resultados más recientes ha sido la creación de una nueva disciplina: la lógica matemática.

En términos generales, el punto de vista axiomático puede describirse como sigue: Probar un teorema en un sistema deductivo consiste en hacer ver que el teorema es una consecuencia lógica y necesaria de ciertas proposiciones previamente establecidas, que a su vez deben ser probadas, y así sucesivamente. El proceso de demostración matemática sería, por tanto, una tarea imposible de regresión infinita, salvo que, en esta marcha hacia atrás, esté permitido detenerse en algún punto. Por tanto, debe de haber un número de proposiciones, llamadas *postulados* o *axiomas,* que son aceptadas como verdaderas, y para las cuales no se requiere ninguna demostración. De éstas podemos intentar deducir todos los teoremas por medio de argumentos puramente lógicos. Si los hechos de un campo científico pueden colocarse en un orden lógico tal que sea posible deducir todo de un cierto número de aserciones previamente elegidas (preferiblemente pocas, sencillas y adecuadas), entonces se dice que ese campo está presentado en forma axiomática. La elección de las proposiciones aceptadas como axiomas es en gran medida arbitraria; pero poco se gana con el método axiomático, si los postulados no son simples y no demasiado numerosos. Además, los postulados deben ser *compatibles*, en el sentido de que no puedan deducirse de ellos dos teoremas contradictorios entre sí; y *suficientes*, de tal modo que todo teorema del sistema sea deducible de ellos. Por razones de economía es también deseable que los postulados sean *independientes*, en el sentido de que ninguno de ellos sea una consecuencia lógica de los restantes.

La cuestión de la compatibilidad y de la suficiencia de un conjunto de axiomas ha sido objeto de mucha controversia. Diferentes convicciones filosóficas concernientes a los últimos cimientos del conocimiento humano han llevado a actitudes aparentemente irreconciliables sobre los fundamentos de la matemática. Si los entes matemáticos son considerados como objetos sustanciales en un reino de «pura intuición», independientes de las definiciones y de los actos individuales de la mente humana, entonces, por supuesto, no puede haber contradicciones, ya que los hechos matemáticos son aserciones objetivamente verdaderas, que describen realidades existentes. Desde este punto de vista «kantiano», no hay problema de compatibilidad. Por desgracia, sin embargo, el cuerpo efectivo de la matemática no puede ser adaptado a un sistema filosófico tan simple. Los modernos matemáticos intuicionistas no confían en la intuición pura en el vasto sentido kantiano. Aceptan el infinito numerable como hijo legítimo de la intuición, y admiten sólo propiedades constructivas; pero de este modo, conceptos básicos, como el continuo numérico, serían desterrados; partes importantes de la matemática excluídas, y el resto desesperadamente complicado.

Muy diferente es el punto de vista adoptado por los «formalistas». Éstos no atribuyen una realidad intuitiva a los objetos matemáticos, ni proclaman que los axiomas expresan verdades obvias concernientes a las realidades de la intuición pura; su interés radica sólo en el procedimiento lógico formal del razonamiento sobre la base de los postulados. Esta actitud tiene una definida ventaja sobre el intuicionismo, puesto que garantiza a la matemática toda la libertad necesaria para la teoría y las aplicaciones. Pero ello impone al formalista la necesidad de probar que sus axiomas, que ahora parecen creaciones arbitrarias de la mente humana, no pueden llevarnos a una contradicción. Se han realizado grandes esfuerzos durante los últimos veinte años para encontrar tales pruebas de compatibilidad, al menos para los axiomas de la aritmética y del álgebra, y para el concepto del continuo numérico. Los resultados son altamente significativos, pero el triunfo está todavía lejos. Realmente, los resultados recientes indican que tales esfuerzos no pueden ser completamente satisfactorios, en el sentido de que las pruebas de compatibilidad y suficiencia no son posibles dentro de sistemas estrictamente cerrados de conceptos. Es digno de observarse que en todos estos argumentos acerca de los fundamentos se procede por métodos que son enteramente constructivos en sí mismos y dirigidos por esquemas intuitivos.

Acentuado por las paradojas de la teoría de conjuntos (cap. II, pág. 96), el conflicto entre intuicionistas y formalistas obtuvo gran publicidad por obra de apasionados partidarios de ambas escuelas. El mundo matemático fué sacudido por el grito de «crisis en los fundamentos»; pero la alarma no era, y no debe ser, tomada demasiado en serio. Aun reconociendo todo el mérito debido a los resultados obtenidos en la lucha por la depuración de los fundamentos, sería completamente injustificado inferir que el cuerpo vivo de la matemática haya sido siquiera amenazado por tales diferencias de opinión o por paradojas inherentes a una incontrolada tendencia hacia la generalización ilimitada.

Aparte de las consideraciones filosóficas y del interés en los fundamentos, el método axiomático en matemática resulta el camino natural para desenredar la madeja de interconexiones entre los distintos hechos, y para demostrar el esqueleto lógico esencial de la estructura. Sucede a veces que tal concentración en la estructura formal, con preferencia al significado intuitivo de los conceptos, hace más fácil dar con generalizaciones y aplicaciones que podrían haber pasado inadvertidas de haber utilizado un método más intuitivo. Pero rara vez se obtiene un descubrimiento significativo o una visión esclarecedora si se hace uso de un procedimiento exclusivamente axiomático. El pensamiento constructivo, guiado por la intuición, es la verdadera fuente de la dinámica matemática. A pesar de que la forma axiomática es un ideal, es una peligrosa falacia creer que la axiomática constituye *la* esencia de la matemática. La intuición constructiva de los matemáticos da a esta ciencia un elemento no deductivo e irracional que la hace comparable con la música y el arte.

Desde los días de Euclides, la geometría ha sido el prototipo de una disciplina axiomatizada. Durante siglos, el sistema de axiomas de Euclides ha sido objeto de estudio intensivo. Pero sólo recientemente se ha puesto de manifiesto que sus postulados debían ser modificados y completados si se deseaba que toda la geometría elemental fuera deducible de ellos. En las postrimerías del siglo XIX, por ejemplo, Pasch descubrió que el orden de los puntos sobre una recta, la noción de «entre», requiere un postulado especial. Pasch formuló la siguiente proposición como nuevo axioma: Una recta que corta un lado de un triángulo en cualquier punto distinto de un vértice debe cortar también a otro lado del triángulo. (Pasar por alto tales detalles lleva a muchas aparentes paradojas, en las que consecuencias absurdas —p. ej., la conocida «demostración» de que todo triángulo es isósceles— parecen deducirse rigurosamente de los axiomas de Euclides. Esto se debe, por lo general, a figuras mal dibujadas, cuyas líneas parecen interceptar interior o exteriormente a ciertos triángulos o circunferencias, cuando en realidad no lo hacen.)

En su famoso libro *Grundlagen der Geometrie*[1] (la primera edición fué publicada en 1901), Hilbert dió un conjunto satisfactorio de axiomas para la geometría, y al propio tiempo hizo un estudio exhaustivo de su mutua independencia, compatibilidad y suficiencia.

En todo sistema de axiomas deben entrar ciertos conceptos no definidos, como *punto* y *recta* en geometría. Su «significado» o relación con objetos del mundo físico no es *matemáticamente* esencial. Pueden ser considerados como entes puramente abstractos, cuyas propiedades matemáticas en un sistema deductivo están dadas completamente por las relaciones existentes entre ellos, enunciadas por los axiomas; p. ej., en geometría proyectiva podemos comenzar con los conceptos no definidos de *punto*, *recta* e *incidencia* o *pertenencia* y con los dos axiomas duales: «Dos puntos distintos cualesquiera pertenecen a una sola recta» y «dos rectas distintas cualesquiera inciden en un solo punto». Desde el punto de vista de la axiomática, la forma dual de tales axiomas es la verdadera fuente del principio de dualidad de la geometría proyectiva. Todo teorema que contenga en su enunciado y en su demostración sólo elementos relacionados por axiomas duales, debe admitir otro teorema dual. En efecto, la demostración del teorema original consiste en la aplicación sucesiva de ciertos axiomas, y la aplicación de los axiomas duales en el mismo orden debe darnos la demostración del teorema dual.

La totalidad de los axiomas de la geometría nos da la *definición implícita* de todos los términos geométricos «no definidos», como «recta», «punto», «incidencia», etc. Para las aplicaciones, es importante el hecho de que los conceptos y los axiomas de la geometría se correspon-

[1] Existe edición española: *Fundamentos de la Geometría*, trad. de F. Cebrián, Instituto Jorge Juan de Matemáticas. C.S.I.C., Madrid.

dan con aserciones físicamente verificables acerca de objetos «reales», tangibles. La realidad física a que alude el concepto de «punto» es la de cualquier objeto muy pequeño, como la huella de un lápiz; mientras una «recta» es una abstracción hecha a partir de un hilo tenso o un rayo de luz. La experiencia nos dice que las propiedades de estos puntos y rectas físicas concuerdan *grosso modo* con los axiomas formales de la geometría. Cabe concebir que experimentos mucho más precisos puedan plantear la necesidad de modificar esos axiomas si éstos han de ser adecuados para describir los fenómenos físicos. Pero si los axiomas formales no concuerdan aproximadamente con las propiedades de los objetos físicos, entonces la geometría apenas tendría interés. Así, incluso para los formalistas, hay una autoridad aparte de la mente humana que decide la dirección del pensamiento matemático.

2. Geometría no euclídea hiperbólica.—Hay un axioma de la geometría euclídea cuya «verdad», o sea, cuya correspondencia con datos empíricos acerca de hilos tensos o rayos de luz, no es de manera alguna evidente. Se trata del famoso *postulado de la paralela única*, el cual establece que por un punto exterior a una recta dada se puede trazar *una, y sólo una*, paralela a la misma. El rasgo característico de este postulado consiste en que hace una aserción acerca de *toda* la extensión de una recta, imaginada como indefinida en ambas direcciones; ya que decir que dos rectas son paralelas equivale a afirmar que no se cortan nunca, por mucho que se las prolongue. No está de más decir que hay muchas rectas que pasan por un punto y no cortan a otra recta dada *dentro de una distancia finita dada*, por grande que sea. Dado que la máxima longitud posible de una regla real, de un hilo, o incluso de un rayo de luz visible con un telescopio es ciertamente finita, y puesto que dentro de cualquier círculo finito hay infinitas rectas que pasan por un punto dado y que no cortan a otra recta dada interior al círculo, se deduce que este axioma no podrá ser verificado por experimentación. Todos los otros axiomas de la geometría euclídea tienen carácter finito en el sentido de que tratan con porciones finitas de rectas y con figuras planas de extensión finita. El hecho de que el axioma de las paralelas no sea verificable experimentalmente plantea la cuestión de ver si es o no *independiente* de los otros axiomas. Si fuera una consecuencia lógica necesaria de los otros, sería posible eliminarlo como axioma y dar una demostración del mismo mediante los otros axiomas de Euclides. Durante varios siglos, los matemáticos trataron de hallar esa demostración, porque existía el sentimiento general de que el postulado de las paralelas era de carácter esencialmente diferente de los demás, al faltarle ese carácter de evidente plausibilidad que debería poseer todo axioma de la geometría. Uno de los primeros intentos de esta naturaleza fué hecho por Proclo (siglo IV a. de J.C.), un comentador de Euclides, quien trató de descartar la necesidad de un postulado especial, relativo a las rectas paralelas, *definiendo* la recta paralela a otra como el lugar de los puntos que se encuentran a una distancia fija de la dada. Proclo no vió que la dificultad se había desplazado a otro lugar, porque sería ahora necesario demostrar que el lugar de tales puntos es en efecto una recta. Como Proclo no pudo probar esto, debió de aceptarlo como postulado en lugar del axioma de las paralelas, y nada se ganó con ello, pues no es difícil demostrar que ambos son equivalentes. El jesuíta Saccheri (1667-1733), y más tarde Lambert (1728-1777), trataron de probar el postulado de las paralelas por el método indirecto de admitir lo contrario y deducir consecuencias absurdas. Lejos de ser absurdas, sus conclusiones realmente equivalían a teoremas de la geometría no euclídea desarrollada después. Si hubieran considerado tales conclusiones, no como absurdas, sino más bien como enunciados compatibles en sí mismos, habrían sido los descubridores de la geometría no euclídea.

En aquel tiempo, todo sistema geométrico que no estuviera en absoluto acuerdo con el de Euclides debía considerarse como un evidente desatino. Kant, el filósofo que mayor influjo ejerció en dicho período, formuló esa actitud en la afirmación de que los axiomas euclídeos son inherentes a la mente humana, y, por tanto, tienen una validez objetiva para el espacio «real». Esta creencia en los axiomas de la geometría euclídea como verdades inalterables, existentes en el reino de la intuición pura, fué uno de los dogmas básicos de la filosofía kantiana. Pero a la larga, ni viejos hábitos del pensamiento ni la autoridad filosófica podían reprimir la convicción de que la interminable serie de fracasos en la búsqueda de una demostración del postulado de las paralelas no era debida a una falta de ingenio, sino más bien al hecho de que tal postulado es realmente *independiente* de los otros. (Análogamente, el fracaso en la resolución de la ecuación general de quinto grado por medio de radicales llevó a la sospecha, más tarde verificada, de que tal solución es imposible.) El húngaro Bolyai (1802-1860) y el ruso Lobachevsky (1793-1856) resolvieron la cuestión construyendo con todo detalle una geometría en la cual el postulado de las paralelas no se verifica. Cuando el joven y entusiasta genio Bolyai sometió su memoria a Gauss, «príncipe de los matemáticos», para el reconocimiento tan ansiosamente esperado, fué informado de que Gauss mismo se le había anticipado, pero no había querido publicar sus resultados por temor a una ruidosa publicidad.

¿Qué significa la independencia del postulado de las paralelas? Sencillamente, que es posible construir un sistema compatible de proposiciones «geométricas» referentes a puntos, rectas, etc., deduciéndolas de un conjunto de axiomas en el cual el postulado de las paralelas se haya reemplazado por un postulado contrario. Tal sistema se llama una geometría no euclídea. Fué precisa la fuerza intelectual de Gauss, Bolyai y Lobachevsky para darse cuenta de que tal geometría, basada en un sistema de axiomas no euclidiano, podía ser perfectamente compatible.

Para probar la compatibilidad de la nueva geometría no basta construir un vasto cuerpo de teoremas no euclidianos, como hicieron Bolyai y Lobachevsky. En lugar de ello, hemos aprendido a construir «modelos» de tal geometría que satisfacén todos los axiomas de Euclides, excepto el de las paralelas. El más sencillo de dichos modelos fué dado por Félix Klein, cuyo trabajo en este campo fué estimulado por las ideas del geómetra inglés Cayley (1821-1895). En este modelo pueden trazarse infinitas *rectas paralelas* a una recta dada por un punto exterior; tal geometría es llamada geometría Bolyai-Lobachevsky o *hiperbólica*. (La razón de este último nombre se encontrará en la pág. 238.)

El modelo de Klein se construye considerando primero objetos de la geometría euclídea ordinaria y *bautizando* a algunos de estos objetos y a las relaciones entre ellos de tal modo que resulte una geometría no euclídea. Este modelo debe ser, *eo ipso*, tan carente de contradicción como el sistema euclídeo original, pues se nos ofrece, visto desde otro punto y descrito con otras palabras, igual que el sistema de proposiciones de la geometría euclídea ordinaria. Dicho modelo puede ser fácilmente comprendido por medio de algunos conceptos de geometría proyectiva.

Si sometemos el plano a una transformación proyectiva sobre otro plano, o mejor sobre sí mismo (por posterior coincidencia del punto imagen con el plano original), en general, un círculo y su interior se transformarán en una cónica. Pero es fácil ver (omitimos la demostración) que existen infinitas transformaciones proyectivas del plano en sí mismo tales que un círculo dado y su interior se transformen en sí mismos. Por tales transformaciones, puntos del interior o del contorno son en general llevados a otras posiciones, pero quedan interiores o en el contorno del círculo (p. ej., podemos transformar el centro del círculo en cualquier otro punto interior). Consideremos la totalidad de tales transformaciones. Ciertamente, éstas no dejarán invariantes las formas de las figuras, y por tanto no son desplazamientos rígidos en el sentido usual; pero ahora damos el paso decisivo al *llamar* a dichas transformaciones «desplazamientos no euclídeos» de la geometría que estamos construyendo. Por medio de estos «desplazamientos» podemos definir la congruencia: dos figuras se *dirán* congruentes si existe un desplazamiento no euclídeo que transforme una en la otra.

El modelo de Klein de la geometría hiperbólica es entonces el siguiente: el «plano» consiste sólo en los puntos interiores a un círculo; los puntos exteriores no se consideran. Cada punto interior del círculo se *llama* «punto» no euclídeo; cada cuerda del círculo se *llama* «recta» no euclídea; los «desplazamientos» y «congruencias» se han definido anteriormente; unir «puntos» y hallar la intersección de «rec-

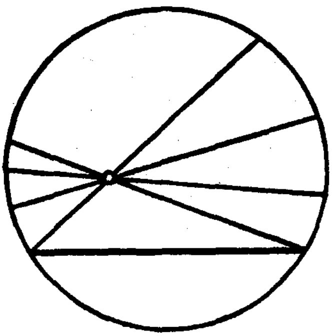

FIG. 110.—Modelo no euclídeo de Klein.

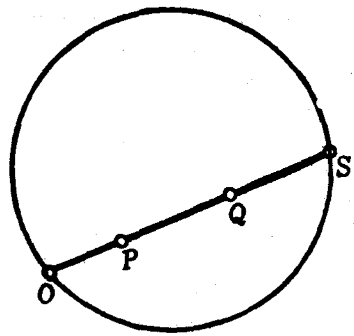

FIG. 111.—Distancia no euclídea.

tas» en el sentido no euclídeo sigue siendo lo mismo que en la geometría de Euclides. Es fácil probar que el nuevo sistema satisface todos los postulados de la geometría euclídea, con la sola excepción del de las paralelas. Que el postulado de las paralelas no se verifica en el nuevo sistema se ve por el hecho de que por todo «punto» exterior a una «recta» pueden trazarse infinitas «rectas» que no tengan ningún «punto» común con la «recta» dada. La primera «recta» es una cuerda euclídea del círculo, mientras la segunda «recta» puede ser cualquiera de las cuerdas que pasan por el «punto» dado y que no cortan a la primera «recta» dentro del círculo. Este sencillo modelo es por completo suficiente para decidir la cuestión fundamental que dió nacimiento a la geometría no euclídea; demuestra que el postulado de las paralelas no puede ser deducido de los otros axiomas de la geometría euclídea; pues si pudiera deducirse, debería ser un teorema verdadero en la geometría del modelo de Klein, y hemos visto que no lo es.

En términos estrictos, este razonamiento está basado en la hipótesis de que la geometría del modelo de Klein no es contradictoria, en el sentido de que no pueden demostrarse a la vez un teorema y su contrario. Pero esta geometría está, efectivamente, tan desprovista de contradicción como la geometría euclídea ordinaria, ya que las proposiciones referentes a *puntos*, *rectas*, etc., en el modelo de Klein, son meramente modos distintos de enunciar determinados teoremas de la geometría euclídea. No ha sido dada hasta ahora una demostración satisfactoria de la compatibilidad de los axiomas de la geometría euclídea, salvo por reducción a los conceptos de la geometría analítica y por ello, en última instancia, al continuo numérico, cuya carencia de contradicción es de nuevo una cuestión sin resolver.

*Debemos mencionar aquí un detalle que excede a nuestro objetivo inmediato, esto es, la manera de definir la «distancia» no euclídea en el modelo de Klein. Esta «distancia» debe resultar invariante respecto a cualquier «desplazamiento» no euclídeo, pues éste no debe alterar las distancias. Sabemos que las razones dobles no varían en la proyección, y una razón doble que haga intervenir dos puntos arbitrarios P y Q, interiores al círculo, aparece inmediatamente si se prolonga el segmento PQ hasta su intersección con la circunferencia en O y S. La razón doble $(OSPQ)$ de estos cuatro puntos es un número (positivo) que puede tomarse como definición de «distancia» PQ entre P y Q, si bien debemos modificar ligeramente esta definición para hacerla útil. Pues si los tres puntos P, Q, R están sobre una recta, debe verificarse que $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$. Ahora bien: en general,

$$(OSPQ) + (OSRQ) \neq (OSRP).$$

Por el contrario, tenemos la relación

$$(OSPQ)(OSRQ) = (OSRP), \qquad [1]$$

como resulta de las igualdades

$$(OSQP)(OSRQ) = \frac{QO/QS}{PO/PS} \cdot \frac{RO/RS}{QO/QS} = \frac{RO/RS}{PO/PS} = (OSRP).$$

Como consecuencia de la ecuación [1] podemos dar una definición aditiva satisfactoria midiendo la «distancia», no por la razón doble, sino por el *logaritmo de la razón doble*:

$$\overline{PQ} = \text{distancia no euclídea de } P \text{ a } Q = \log\,(OSQP).$$

Esta distancia será un número positivo, ya que $(OSQP) > 1$ si $P \neq Q$. Utilizando la propiedad fundamental del logaritmo (véase Cap. VII) resulta de [1] que $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$. Es indiferente la base que se elija para el sistema de logaritmos, pues al variar ésta, solamente cambia la unidad de medida. Observemos que si uno de los puntos, p. ej., Q, se aproxima a la circunferencia, la distancia no euclídea PQ tiende a infinito, lo cual prueba que la recta de nuestra geometría no euclídea tiene longitud no euclídea infinita, aunque en el sentido euclídeo ordinario sea solamente un segmento finito de recta.

3. Geometría y realidad.—El modelo de Klein demuestra que la geometría hiperbólica, considerada como un sistema formal deductivo, resulta tan satisfactoria como la geometría euclídea clásica. La cuestión que se presenta es: ¿cuál de las dos es preferible como descripción de la geometría del mundo físico? Como ya hemos visto, la experimentación nunca podrá decidir si hay una sola paralela o bien hay infinitas por un punto exterior a una recta dada. En la geometría euclídea, sin embargo, la suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180°. A este respecto, Gauss ideó un experimento para resolver la cuestión. Midió con todo cuidado los ángulos de un triángulo formado por tres cimas montañosas muy distantes, y encontró que la suma era de 180°, dentro de los límites del error experimental. Si el resultado hubiera sido notablemente inferior a 180°, la consecuencia inmediata sería que la geometría hiperbólica es preferible para describir la realidad física. Pero nada se resolvió con este experimento, ya que para pequeños triángulos, cuyos lados tienen sólo unos pocos kilómetros de longitud, la diferencia con 180° en la geometría hiperbólica debe ser tan pequeña como para pasar inadvertida con los instrumentos usados por Gauss. Así, a pesar de que el experimento no resolvió la cuestión, probó, no obstante, que las geometrías hiperbólica y euclídea, cuyas diferencias *en grande* son notables, coinciden casi por completo para figuras relativamente pequeñas, por lo que experimentalmente son equivalentes. Por tanto, mientras se consideren propiedades puramente *locales* del espacio, la elección entre ambas geometrías debe hacerse sólo sobre la base de la sencillez y comodidad. Puesto que el sistema euclídeo es más sencillo de manejar, está justificado que lo usemos exclusivamente, por lo menos mientras se consideran distancias pequeñas (¡de unos cuantos millones de kilómetros!). Pero no debemos esperar necesariamente que dicho sistema sea apropiado para describir el universo como un todo, en sus aspectos más grandiosos. Aquí la situación es precisamente análoga a la que existe en física, donde los sistemas de Newton y de Einstein dan los mismos resultados para pequeñas distancias y velocidades, pero divergen cuando se trata de grandes magnitudes.

La importancia revolucionaria del descubrimiento de la geometría no euclídea estriba en el hecho de que destruyó la noción que se tenía de los axiomas de Euclides, como esquema matemático inmutable al que debía adaptarse nuestro conocimiento experimental de la realidad física.

4. Modelo de Poincaré.—El matemático es libre de considerar una «geometría» como definida por cualquier sistema de axiomas compatibles, referentes a *puntos*, *rectas*, etc.; sus investigaciones resultarán útiles al físico únicamente cuando estos axiomas se ajusten al comportamiento físico de los objetos del mundo real. Desde este punto de vista, vamos a examinar el significado de la frase «la luz se propaga en línea recta». Si se considera esto como *definición física* de «recta», entonces los axiomas de la geometría deben ser elegidos de forma que se correspondan con el comportamiento de los rayos de luz. Imaginemos, con Poincaré, un universo constituído por el interior de una circunferencia C y tal que la velocidad de la luz en un punto del círculo sea igual a la distancia del mismo a la circunferencia. Puede demostrarse que los rayos de luz adoptarán la forma de arcos circulares, normales en sus extremos a la circunferencia C. En tal universo, las propiedades geométricas de las «rectas» (definidas como rayos de luz) diferirán de las propiedades euclídeas de las rectas, y, en particular, el postulado de las paralelas dejará de cumplirse, puesto que existen infinitas «rectas» que pasan por un punto y no cortan a una «recta» dada. Por supuesto, que los «puntos» y «rectas» de este universo tendrían exactamente las propiedades geométricas de los «puntos» y «rectas» del modelo de Klein. En otras palabras: tendríamos un modelo diferente de la geometría hiperbólica. Pero la geometría euclídea se aplicará también a este universo; en lugar de ser «rectas» no euclídeas, los rayos luminosos serían circunferencias euclídeas ortogonales a C. Vemos así que diferentes sistemas de geometría pueden describir la misma situación física, con tal que los objetos físicos (en este caso, rayos de luz) estén correlacionados con los diferentes conceptos de los dos sistemas:

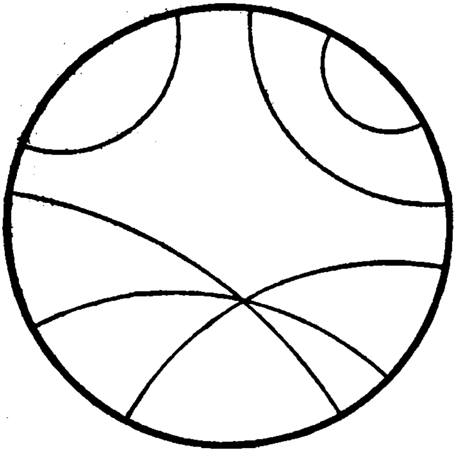

FIG. 112.—Modelo no euclídeo de Poincaré.

rayo de luz → «línea recta» — geometría hiperbólica.
rayo de luz → «circunferencia» — geometría euclídea.

Puesto que el concepto de recta en la *geometría euclídea* corresponde a la conducta de un rayo de luz en un medio homogéneo, diremos que la *geometría de la región interior a C* es hiperbólica, para significar sólo que las propiedades físicas de los rayos luminosos en ese universo corresponden a las propiedades de las «rectas» de la geometría hiperbólica.

5. Geometría elíptica o de Riemann.—En la *geometría* de Euclides, así como en la hiperbólica de Bolyai y Lobachevsky, se supone tácitamente que la recta es infinita (la extensión infinita de la recta está esencialmente vinculada con el concepto y los axiomas de «estar entre»). Pero después que la geometría hiperbólica hubo abierto el camino hacia la libre construcción de geometrías, era natural preguntar si podía construirse una geometría no euclídea en la cual una línea recta no fuera infinita, sino finita y cerrada. Por supuesto, en tales geometrías no sólo debería abandonarse el postulado de las paralelas, sino también los axiomas referentes a «estar entre». Los desarrollos modernos han probado la importancia física de estas geometrías. Fueron consideradas por primera vez en el discurso inaugural pronunciado en 1851 por Riemann con motivo de su admisión como profesor adjunto («Privat-Docent») en la Universidad de Gotinga. Pueden construirse geometrías con rectas finitas y cerradas en una forma carente por completo de contradicción.

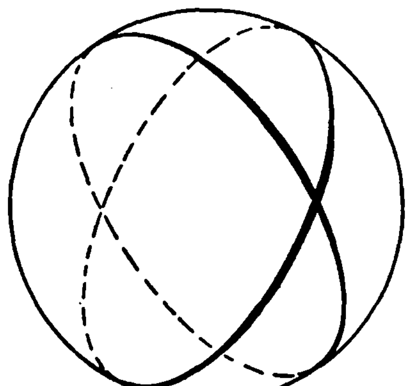

FIG. 113.—«Líneas rectas» en la geometría de Riemann.

Imaginemos un mundo bidimensional, consistente en la superficie S de una esfera, en el cual definimos la *recta* con el significado de círculo máximo de la esfera. Éste sería el camino natural para describir el mundo de un navegante, puesto que los arcos de círculo máximo son las curvas de longitud mínima entre dos puntos de una superficie esférica, y ésta es la propiedad característica de las rectas del plano. En tal mundo, dos «rectas» *cualesquiera* se cortan, de modo que por un punto exterior a una recta no puede trazarse *ninguna* paralela (esto es, no secante) a la «recta» dada. La geometría de las «rectas» en dicho mundo se llama *geometría elíptica*. En esta geometría, la distancia entre dos puntos se mide simplemente por su distancia a lo largo del menor arco del círculo máximo que los une, mientras los ángulos se miden como en la geometría euclídea. Consideramos en general como típico de una geometría elíptica el hecho de que no exista ninguna paralela a una recta dada.

Siguiendo a Riemann, podemos generalizar dicha geometría como sigue. Consideremos un universo consistente en una superficie curva en el espacio, no necesariamente esférica, y definamos la «recta» que

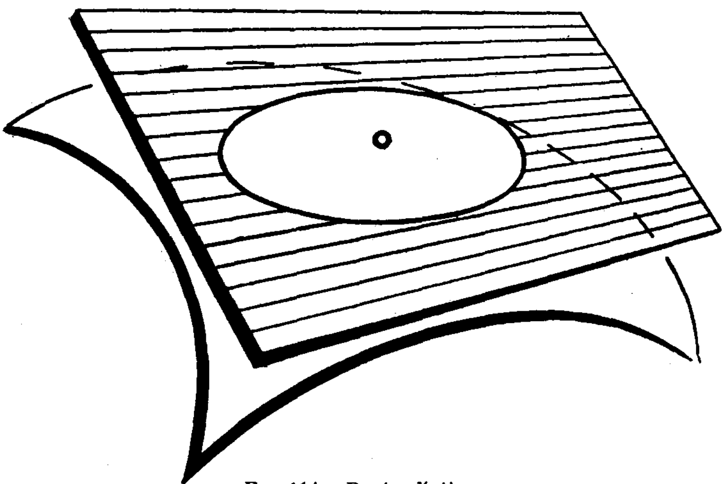

FIG. 114.—Punto elíptico.

une dos puntos como la *curva de menor longitud* o «geodésica» que une esos puntos. Los puntos de la superficie pueden dividirse en dos clases: 1) puntos tales que en un entorno de cada uno la superficie es como una esfera, en el sentido de que está situada por completo de un mismo lado del plano tangente en ese punto; 2) puntos tales que en un entorno de cada uno la superficie tiene forma de silla de montar y está situada a ambos lados del plano tangente en el punto. Los puntos de la primera clase se llaman puntos elípticos de la superficie, puesto que si el plano tangente se traslada un poco paralelamente a sí mismo, corta a la superficie en una curva elíptica; mientras que los puntos de la segunda clase se llaman hiperbólicos, ya que, si el plano tangente se traslada un poco paralelamente a sí mismo, corta a la superficie en una curva parecida a una hipérbola. La geometría de las «rectas» geodésicas en el entorno de un punto de una superficie es elíptica o hiperbólica según que el punto sea elíptico o hiperbólico. En tal modelo de geometría no euclídea, los ángulos se miden por su valor euclídeo ordinario.

Esta idea fué desarrollada por Riemann, quien consideró una geometría del espacio análoga a esta geometría de una superficie, en la cual la «curvatura» del espacio puede cambiar el carácter de la geometría de un punto a otro. Las *rectas* en una geometría de Riemann son las geodésicas. En la teoría general de la relatividad de Einstein, la geometría del espacio es una geometría de Riemann; la luz se propaga a lo largo de geodésicas, y la curvatura del espacio se determina por la naturaleza de la materia que lo llena.

Desde su origen en el estudio de la axiomática, la geometría no euclídea se ha ido desarrollando hasta convertirse en un instrumento útil para su aplicación al mundo físico. En la teoría de la relatividad, en óptica, y en la teoría general de la propagación de ondas, una des-

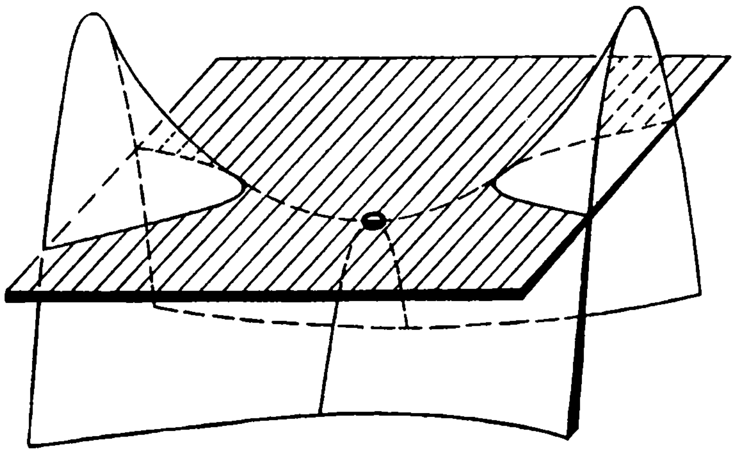

FIG. 115.—Punto hiperbólico.

cripción no euclídea de los fenómenos es a veces mucho más adecuada que la descripción clásica.

APÉNDICE

*GEOMETRÍA DE MÁS DE TRES DIMENSIONES

1. **Introducción.**—El *espacio real*, que es el medio donde tiene lugar nuestra experiencia física, tiene tres dimensiones; el plano, dos, y la recta, una. Nuestra intuición espacial, en un sentido ordinario, está definitivamente limitada a tres dimensiones. Sin embargo, en muchas ocasiones es conveniente hablar de *espacios* de cuatro o más

dimensiones. ¿Cuál es el significado de un espacio n-dimensional cuando n es mayor que tres, y para qué fines puede servir? Puede darse una respuesta tanto desde el punto de vista analítico como desde el puramente geométrico. La terminología de un espacio n-dimensional puede considerarse meramente como un lenguaje geométrico sugestivo para ideas matemáticas que no están ya al alcance de la intuición geométrica ordinaria. Daremos una breve indicación de las sencillas consideraciones que motivan y justifican este lenguaje.

2. Método analítico.—Hemos insistido ya en la inversión de significado que tuvo lugar en el curso del desarrollo de la geometría analítica. Puntos, rectas, curvas, etc., eran originariamente considerados como entes puramente *geométricos*, y el objeto de la geometría analítica era sólo el de asignarles sistemas de números o ecuaciones, e interpretar o desarrollar una teoría geométrica por métodos algebraicos o analíticos. En el transcurso del tiempo, el punto de vista opuesto comenzó a imponerse cada vez más. Un número x o un par de números x, y o una terna de números x, y, z, fueron considerados como los objetos fundamentales, y estas entidades analíticas fueron luego «interpretadas» como puntos de una recta, de un plano, o del espacio. Desde este punto de vista, el lenguaje geométrico sirve únicamente para establecer relaciones entre números. Podemos descartar el carácter primario o incluso independiente de los objetos geométricos, diciendo que un par de números x, y *es* un punto del plano, que el conjunto de todos los pares de números x, y que satisfacen a la ecuación lineal $L\ (x, y) = ax + by + c = 0$ de coeficientes fijos a, b, c, *es* una recta, etc. Definiciones análogas pueden darse para el espacio de tres dimensiones.

Aun estando primordialmente interesados en un problema algebraico puede ocurrir que el lenguaje geométrico proporcione una descripción breve y adecuada del mismo, y que la intuición geométrica sugiera el procedimiento algebraico apropiado; p. ej., si deseamos resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas x, y, z:

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= ax + by + cz + d = 0 \\ L'(x, y, z) &= a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ L''(x, y, z) &= a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \end{aligned}$$

podemos interpretar el problema como si se tratara de hallar el punto de intersección en el espacio tridimensional R_3 de tres planos definidos por las ecuaciones $L = 0$, $L' = 0$, $L'' = 0$. También, si estamos sólo considerando los pares de números x, y para los cuales $x > 0$, podemos interpretarlos como representando el semiplano de la derecha del eje x. Con mayor generalidad, la totalidad de los pares de números x, y para los cuales

$$L(x, y) = ax + by + d > 0$$

puede interpretarse como el semiplano a un lado de la recta $L = 0$, y la totalidad de las ternas de números x, y, z para las cuales

$$L(x, y, z) = ax + by + cz + d > 0$$

puede considerarse como el «semiespacio» de un lado del plano $L(x, y, z) = 0$.

La introducción de un «espacio tetradimensional», o incluso de un «espacio n-dimensional», resulta ahora natural. Consideremos una cuaterna de números x, y, z, t; se dice que tal cuaterna está representada por, o simplemente *es*, un punto del espacio tetradimensional R_4. Con más generalidad, un punto del espacio n-dimensional R_n es, por definición, un conjunto ordenado de n números reales $x_1, x_2, ..., x_n$. No importa que no podamos idearnos tal punto. El lenguaje geométrico es igualmente sugestivo para las propiedades algébricas referentes a cuatro o n variables. La razón de esto es que muchas de las propiedades algébricas de las ecuaciones lineales, etc., son esencialmente independientes del número de variables que aparecen o, como podemos decir, de la dimensión del espacio de las variables; p. ej., llamamos «hiperplano» a la totalidad de los puntos $x_1, x_2, ..., x_n$ de un espacio n-dimensional R_n y que satisfacen a la ecuación lineal:

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0.$$

Por tanto, el problema algebraico fundamental de resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{aligned} L_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ L_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ L_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

se plantea en lenguaje geométrico como el de determinar el punto de intersección de los n hiperplanos $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, ..., $L_n = 0$.

La ventaja de este modo geométrico de expresión radica solamente en que hace hincapié sobre ciertas propiedades algebraicas que son independientes de n, *y que pueden imaginarse intuitivamente para* n $\leqslant 3$. En muchas aplicaciones, el uso de tal terminología tiene la ventaja de abreviar, facilitar y dirigir las consideraciones intrínsecamente analíticas. La teoría de la relatividad puede mencionarse como ejemplo donde se ha logrado un importante progreso unificando las coordenadas espaciales x, y, z y la coordenada de tiempo t, en un «suceso» perteneciente a una variedad tetradimensional «espacio-tiempo» de cuaternas de números x, y, z, t. Por la introducción de una geometría no euclídea hiperbólica en este esquema analítico se hace posible describir con gran sencillez muchas situaciones de otro modo complejas. Ventajas análogas se han obtenido en mecánica y en física estadística, así como en campos puramente matemáticos.

He aquí algunos ejemplos tomados de las matemáticas. La totalidad de los círculos del plano constituye una variedad tridimensional, porque un círculo de centro x, y, y radio t puede ser representado por un punto de coordenadas x, y, t. Puesto que el radio de un círculo es un número positivo, la totalidad de los puntos representativos de círculos llena un semiespacio. De la misma manera, el conjunto de todas las esferas del espacio tridimensional ordinario constituye una variedad tetradimensional, ya que cada esfera de centro x, y, z y radio t puede representarse por un punto de coordenadas x, y, z, t. Un cubo en el espacio tridimensional, de arista 2, caras paralelas a los planos coordenados y centro en el origen, está formado por la totalidad de los puntos x_1, x_2, x_3 para los cuales $|x_1| \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant 1$, $|x_3| \leqslant 1$. De la misma manera, un «cubo» de arista 2 en un espacio n-dimensional R_n, caras paralelas a los planos coordenados y centro en el origen, se define como la totalidad de los puntos $x_1, x_2, ..., x_n$ para los cuales se verifica simultáneamente

$$|x_1| \leqslant 1, \qquad |x_2| \leqslant 1, \cdots, |x_n| \leqslant 1.$$

La «superficie» de este cubo consta de todos los puntos para los que se verifica uno al menos de los signos de igualdad. Los elementos de superficie de dimensión $n-2$ constan de los puntos para los cuales tienen lugar *dos* al menos de los signos de igualdad, etc.

Ejercicio: Descríbase la superficie de uno de tales cubos en el caso de tres, cuatro y n dimensiones.

***3. Método geométrico o combinatorio.**—Mientras la construcción analítica de la geometría n-dimensional es sencilla y se adapta bien a muchas aplicaciones, hay otro método de proceder que es de carácter puramente geométrico. Éste se basa en una reducción de los datos de n a $n-1$ dimensiones, lo que nos permitirá definir la geometría de varias dimensiones por un proceso de inducción matemática.

Comencemos con el contorno de un triángulo ABC en dos dimensiones. Si se corta la poligonal cerrada por el punto C y se hacen girar AC y BC hasta que vengan sobre la recta AB, obtenemos el segmento de la figura 116, en el cual el punto C aparece dos veces. Esta figura unidimensional da una representación completa del contorno del triángulo de dos dimensiones. Plegando los dos segmentos AC y BC en el plano, podemos hacer que los dos puntos C coincidan de nuevo. Pero, y esto es el aspecto importante, no precisamos hacer tal plegado. Necesitamos solamente «identificar», o sea, no distinguir entre los dos puntos C de la figura 116, incluso aunque no coincidan efectivamente, como entes geométricos en sentido corriente. Podemos dar

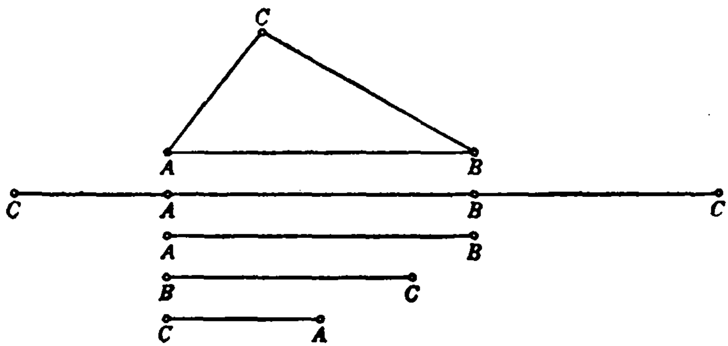

FIG. 116.—Triángulo definido por segmentos con los extremos coordinados.

aún un paso más separando los tres segmentos por los puntos A y B, para obtener un conjunto de tres segmentos CA, AB y BC, que pueden ser reunidos de nuevo para formar un triángulo «real» sin más que hacer coincidir los pares de puntos identificados. Esta idea de identificar puntos diferentes en un conjunto de segmentos para formar un polígono (en este caso, un triángulo) resulta a veces muy práctica. Si deseamos embarcar una complicada estructura de acero, como la de un puente, la reducimos a simples barras y marcamos con el mismo símbolo aquellos extremos que deben ser unidos cuando la estructura vaya a ser armada en el espacio. El sistema de barras con extremos marcados es completamente equivalente a la estructura espacial. Esta observación sugiere el camino para reducir la superficie bidimensional de un poliedro en un espacio de tres dimensiones a figuras de menor número de dimensiones. Tomemos, p. ej., la superficie de un cubo (Fig. 117); puede ser inmediatamente reducida a un sistema de seis cuadrados planos cuyos segmentos de contorno se identifiquen apropiadamente, y en otro paso ulterior se reduce a un sistema de doce segmentos rectilíneos con sus extremos convenientemente identificados.

En general, cualquier poliedro del espacio tridimensional R_3 puede reducirse de esta forma, bien a un sistema de polígonos planos, o bien a un sistema de segmentos rectilíneos.

Ejercicio: Efectúese esta reducción para todos los poliedros regulares (véase página 249).

Queda ahora completamente claro que podemos invertir nuestro razonamiento, *definiendo* un polígono en el plano por un sistema de segmentos rectilíneos, y un poliedro en R_3 por un sistema de polígonos en R_2, o bien, con una mayor reducción, por un sistema de segmentos rectilíneos. Por consiguiente, es natural definir un «poliedro» en el espacio de cuatro dimensiones R_4, mediante un sistema de po-

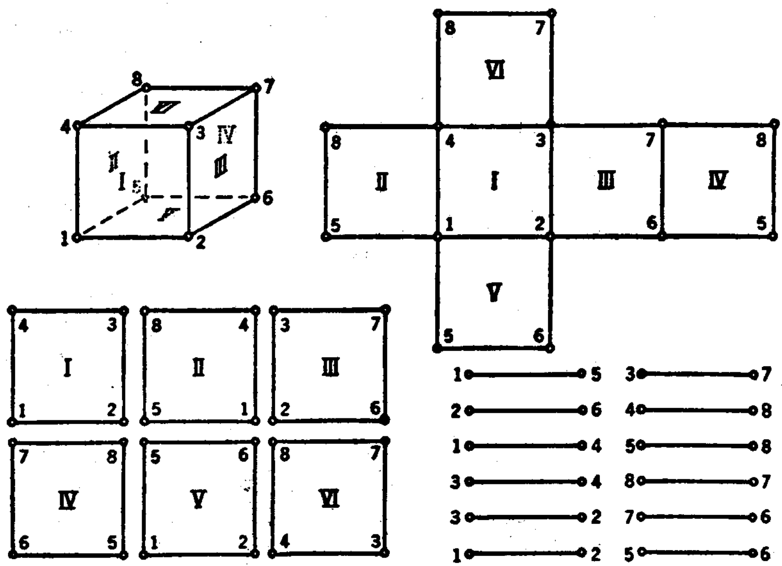

FIG. 117.—Cubo definido por coordinación de vértices y aristas.

liedros en R_3 con apropiada identificación de sus caras bidimensionales; los poliedros de R_5 por sistemas de poliedros en R_4, y así sucesivamente. En definitiva, podemos reducir cualquier poliedro en R_n a un sistema de segmentos rectilíneos.

No es posible desarrollar aquí por completo esta teoría; sólo pueden agregarse algunas observaciones sin demostración. Un cubo en R_4 está limitado por 8 cubos de tres dimensiones, cada uno identificado con un «vecino» a lo largo de una cara bidimensional. El cubo en R_4 tiene 16 vértices, en cada uno de los cuales se encuentran 4 de las 32 aristas. En R_4 hay 6 poliedros regulares; además del «cubo», hay uno limitado por 5 tetraedros regulares, uno limitado por 16 tetraedros, uno limitado por 24 octaedros, uno limitado por 120 dodecaedros y otro limitado por 600 tetraedros. Para $n > 4$ dimensiones se ha demostrado que sólo son posibles tres poliedros regulares: uno con $n + 1$ vértices, limitado por $n + 1$ poliedros en R_{n-1}, con n aristas

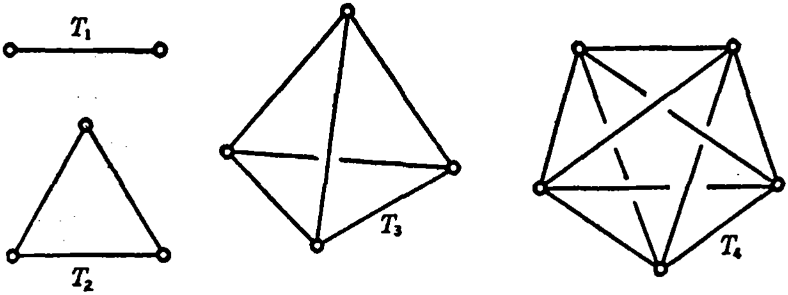

FIG. 118.—Las figuras geométricas más sencillas en 1, 2, 3 y 4 dimensiones.

de $(n - 2)$ dimensiones; uno con 2^n vértices, limitado por $2n$ poliedros en R_{n-1}, con $2n - 2$ aristas, y uno con $2n$ vértices, limitado por 2^n poliedros, de n caras, en R_{n-1}.

Ejercicio: Compárese la definición del cubo en R_4, dada en la página 242, con la definición que acabamos de dar ahora, y pruébese que la definición «analítica» de la superficie del cubo citado es equivalente a la definición «combinatoria» que se acaba de dar.

Desde el punto de vista estructural, o «combinatorio», las figuras geométricas más sencillas de dimensiones 0, 1, 2, 3, son el punto, el segmento, el triángulo y el tetraedro, respectivamente. Con objeto de dar una notación uniforme designemos estas figuras con los símbolos T_0, T_1, T_2, T_3, respectivamente. (Los subíndices señalan la dimensión.)

La estructura de cada una de estas figuras se describe diciendo que cada T_n contiene $n + 1$ vértices y que cada subconjunto de $i + 1$ vértices de un $T_n (i = 0, 1, ..., n)$ determina un T_i; p. ej., el tetraedro tridimensional T_3 contiene 4 vértices, 6 segmentos y 4 triángulos.

Es evidente la forma de proceder: Definimos un «tetraedro» tetradimensional T_4 como un conjunto de 5 vértices tales que cada subconjunto de 4 vértices determina un T_3, cada subconjunto de 3 vértices determina un T_2, etc. El diagrama esquemático de T_4 se muestra en la figura 118. Vemos que T_4 contiene 5 vértices, 10 segmentos, 10 triángulos y 5 tetraedros.

La generalización para n dimensiones es inmediata. Por la teoría de las combinaciones se sabe que hay exactamente $C_i^r = \dfrac{r!}{i!(r-i)!}$ subconjuntos diferentes, de i objetos cada uno, que pueden formarse con un conjunto dado de r objetos. Luego un «tetraedro» n-dimensional contiene:

$$C_1^{n+1} = n + 1 \qquad \text{vértices} \qquad (T_0),$$

$$C_2^{n+1} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} \qquad \text{segmentos} \qquad (T_1),$$

$$C_3^{n+1} = \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} \qquad \text{triángulos} \qquad (T_2),$$

$$C_4^{n+1} = \frac{(n+1)!}{4!(n-3)!} \qquad T_3,$$

. . . .

$$C_{n+1}^{n+1} = 1 \qquad T_n.$$

Ejercicio: Dibújese un diagrama de T_5 y determínese el número de los T_i diferentes que contiene, para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.