CAPÍTULO III

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS ÁLGEBRA DE LOS CUERPOS NUMÉRICOS

Introducción.—Los problemas de construcción han sido siempre un tema favorito en geometría. Sólo con el auxilio de la regla y el compás puede realizarse una gran variedad de construcciones, como el lector debe recordar; puede construirse el punto medio de un segmento o la bisectriz de un ángulo; puede trazarse una recta perpendicular a otra desde un punto dado; puede ser inscrito un hexágono regular en una circunferencia, etc. En todos estos problemas, la regla se usa meramente como borde rectilíneo para dibujar rectas, pero no para medir o transportar distancias. La restricción tradicional de utilizar como únicos instrumentos la regla y el compás se remonta a la antigüedad, aunque los griegos no vacilaban en usar otros instrumentos.

Uno de los más famosos entre los problemas clásicos de construcción es el llamado problema de Apolonio (hacia el año 200 a. de J.C.), en el cual se dan tres circunferencias arbitrarias del plano y se pide trazar una cuarta, tangente a las tres. En particular, una o más de las circunferencias dadas puede degenerar en un punto o en una recta («circunferencia» de radio «cero» o «infinito», respectivamente); p. ej., se puede construir una circunferencia tangente a dos rectas dadas y que pase por un punto dado. Mientras resulta fácil resolver dichos casos especiales, el problema general es considerablemente más difícil.

Entre todos los problemas de construcción, el de trazar con regla y compás el polígono regular de n lados tiene quizá el máximo interés. Para ciertos valores de n, p. ej., $n = 3, 4, 5, 6$, la solución se conoce desde la antigüedad, y forma parte importante de la geometría elemental. Pero para el heptágono regular ($n = 7$) se ha demostrado que la construcción es imposible. Hay otros tres problemas griegos clásicos para los cuales se ha buscado en vano una solución: la trisección de un ángulo arbitrario, la duplicación del cubo (es decir, la construcción de la arista de un cubo cuyo volumen sea doble del de un cubo de arista dada) y la cuadratura del círculo (esto es, la construcción de un cuadrado que tenga igual área que un círculo dado). En todos estos problemas los únicos instrumentos permitidos son la regla y el compás. Problemas de este tipo, que seguían sin resolverse, dieron nacimiento a uno de los más notables desarrollos de la matemática, cuando, después de siglos de investigación inútil, surgió la sospecha de que dichos problemas debían de ser definitivamente irresolubles. Los matemáticos se propusieron investigar la cuestión de: *¿Cómo es posible probar que ciertos problemas no pueden resolverse?*

En álgebra, fué el problema de resolver ecuaciones de quinto a superior grado el que llevó a esta nueva manera de pensar. Durante el siglo XVI los matemáticos habían aprendido que las ecuaciones algebraicas de tercero o cuarto grados podían resolverse por un proceso análogo al método elemental utilizado para resolver las ecuaciones cuadráticas. Todos estos métodos tienen la siguiente característica común: las soluciones o «raíces» de la ecuación pueden escribirse como expresiones algebraicas, a partir de los coeficientes de aquélla, mediante una sucesión de operaciones, cada una de las cuales es una operación racional —adición, resta, multiplicación o división— o la extracción de una raíz cuadrada, cúbica o cuarta. Se dice que las ecuaciones algebraicas hasta las de cuarto grado pueden ser resueltas «por radicales» (*radix* es la palabra latina de raíz). Nada parece más natural que extender este procedimiento a las ecuaciones de grados quinto o superior, utilizando raíces de índice mayor, pero tales intentos fracasaron; incluso algunos distinguidos matemáticos del siglo XVIII se engañaron creyendo que habían dado con la solución. Ya en los primeros años del siglo XIX el italiano Ruffini (1765-1822) y el genio noruego N. H. Abel (1802-1829) concibieron la entonces revolucionaria idea de probar *la imposibilidad de resolver la ecuación algebraica general de grado* n *por medio de radicales.*

Debe quedar completamente claro que la cuestión no reside en si cualquier ecuación algebraica de grado n posee soluciones; este hecho fué demostrado por vez primera por Gauss en su tesis doctoral en 1799. Así, pues, no hay duda acerca de la *existencia* de soluciones de una ecuación, especialmente desde que estas raíces pueden hallarse por procedimientos adecuados, con cualquier grado de aproximación. El arte de la resolución numérica de las ecuaciones es, naturalmente, muy importante y está muy desarrollado; pero el problema de Abel y Ruffini es completamente distinto: ¿puede encontrarse la solución utilizando *únicamente operaciones racionales y radicales?* Fué el deseo de alcanzar claridad completa sobre esta cuestión lo que inspiró el magnífico desarrollo del álgebra moderna y de la teoría de grupos, iniciado por Ruffini, Abel y Galois (1811-1832).

El problema de probar la imposibilidad de ciertas construcciones geométricas nos procura uno de los ejemplos más sencillos de esta tendencia del álgebra. Mediante el uso de conceptos algebraicos podremos demostrar en este capítulo la imposibilidad de trisecar el ángulo, de construir el heptágono regular, o de duplicar el cubo, con la sola ayuda de la regla y el compás. (El problema de la cuadratura del círculo es mucho más difícil de tratar; véase pág. 152). Nuestro punto de partida no será la cuestión negativa de la imposibilidad de ciertas construcciones, sino, por el contrario, la cuestión positiva de cómo pueden caracterizarse completamente todos los problemas *construibles*. Después de haber contestado a esta cuestión, será tarea fácil probar que los problemas mencionados caen fuera de esta categoría.

A los diecisiete años, Gauss investigó la constructibilidad de los «p-ágonos» regulares (polígonos de p lados), siendo p un número primo. Sólo se conocía entonces la construcción para $p = 3$ y $p = 5$; Gauss descubrió que el «p-ágono» regular era *construible* si, y sólo si, p es un «número primo de Fermat»; es decir,

$$p = 2^{2^n} + 1.$$

Los primeros números de Fermat son 3, 5, 17, 257, 65 537 (véase página 33). Tan entusiasmado se sintió el joven Gauss por su descubrimiento, que renunció a su intención de hacerse filólogo y resolvió dedicar su vida a la matemática y sus aplicaciones. Siempre recordó la primera de sus grandes proezas con particular orgullo. Después de su muerte le fué erigida en Gotinga una estatua de bronce, y no pudo encontrarse honor más adecuado que el de dar a su pedestal la forma de un polígono regular de 17 lados.

Cuando se trata de construcciones geométricas no hay que olvidar nunca que el problema no es el de dibujar figuras en la práctica con cierto grado de exactitud, sino el de demostrar que sin otra ayuda que la regla y el compás la solución puede hallarse teóricamente, suponiendo que nuestros instrumentos tienen precisión ideal. Lo que Gauss demostró es que sus construcciones pueden realizarse en principio. Su teoría nada tiene que ver con el método más sencillo de realizarlas efectivamente o con los artificios que permitan simplificar y acortar el número de pasos necesarios; ésta es una cuestión de importancia teórica mucho menor. Desde un punto de vista práctico, ninguna construcción puede resultar tan satisfactoria como la que se obtiene mediante el uso de un buen trasportador de ángulos. El no entender adecuadamente el carácter teórico de la cuestión de las construcciones geométricas y la obstinación en querer desconocer los hechos científicos bien establecidos son responsables de la persistencia de los innumerables trisectores de ángulos y cuadradores de círculos. Aquellos de entre éstos que sean capaces de entender las matemáticas elementales, pueden sacar provecho del estudio de este capítulo.

Una vez más recalcaremos que en algunas ocasiones nuestro concepto de construcción geométrica parece artificial. La regla y el compás son, ciertamente, los instrumentos más simples para dibujar; pero la restricción de utilizar exclusivamente estos instrumentos no es de forma alguna esencial en geometría. Como los matemáticos griegos sabían, tiempo ha, ciertos problemas —tales como el de duplicar el cubo— pueden resolverse si se permite, p. ej., utilizar una regla en forma de ángulo recto; es bastante fácil idear instrumentos distintos del compás, por medio de los cuales es posible dibujar elipses, hipérbolas y curvas mucho más complicadas, y cuyo uso amplía considerablemente el dominio de las figuras *construíbles*. En los próximos párrafos, sin embargo, seguiremos adheridos al concepto usual de construcciones geométricas mediante el uso exclusivo de la regla y el compás.

PARTE PRIMERA

DEMOSTRACIONES DE IMPOSIBILIDAD Y ÁLGEBRA

I. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

1. Construcción de cuerpos de números y extracción de raíces cuadradas.—Para dar forma a nuestras ideas generales comenzaremos examinando algunas de las construcciones clásicas. La clave de una comprensión más profunda reside en trasladar los problemas geométricos al lenguaje del álgebra.

Todo problema de construcción geométrica es del siguiente tipo: se da cierto conjunto de segmentos rectilíneos, a, b, c, ... y se pide construir uno o más segmentos, x, y, ... Es siempre posible formular los problemas de este modo, aunque a primera vista tengan un aspecto muy diferente. Los segmentos requeridos pueden aparecer como lados de un triángulo a construir, como radios de círculos, o como coordenadas rectangulares de ciertos puntos (véase, p. ej., pág. 138). Por sencillez, supondremos que sólo se pide un segmento x. La construcción geométrica equivale entonces a resolver un problema algebraico; primero debemos hallar una relación (ecuación) entre la cantidad pedida x y las dadas a, b, c, ...; después hay que hallar la cantidad buscada x resolviendo esta ecuación, y, finalmente, debemos determinar si esta solución puede obtenerse mediante un proceso algebraico que corresponda a las construcciones con regla y compás. Éste es el principio de la geometría analítica: la caracterización cuantitativa de los objetos geométricos mediante números reales, basada en la introducción del continuo numérico real, que es el fundamento de toda la teoría.

Observemos en primer lugar que algunas de las operaciones algebraicas más sencillas corresponden a construcciones geométricas elementales. Dados dos segmentos de longitudes a y b (medidos con un segmento «unidad» dado), es inmediato construir $a + b$, $a - b$, ra (donde r es cualquier número racional), a/b y ab.

Para construir $a + b$ (Fig. 27) trazamos una recta y llevamos con el compás las distancias $OA = a$ y $AB = b$; entonces $OB = a + b$. Análogamente, para $a - b$, llevamos $OA = a$ y $AB = b$; pero esta vez AB en sentido opuesto a OA; entonces $OB = a - b$. Para construir $3a$ sumamos simplemente $a + a + a$; de forma análoga, podemos construir pa, siendo p cualquier entero. Construiremos $a/3$ mediante el siguiente artificio (Fig. 28): llevamos $OA = a$ sobre una recta, y dibujamos una segunda recta por O. Sobre ésta llevamos un segmento arbitrario $OC = c$, y construímos $OD = 3c$. Unimos A con D, y trazamos desde C una recta paralela a AD, que corta a OA en B. Los triángulos OBC y OAD son semejantes; por tanto, $OB/a = OB/OA = OC/OD = 1/3$, y $OB = a/3$. Del mismo modo podemos construir a/q, donde q es cualquier entero. Aplicando esta operación al segmento pa podemos construir ra, siendo $r = p/q$ un número racional cualquiera.

Para construir a/b (Fig. 29) llevamos $OB = b$ y $OA = a$ sobre los lados de un ángulo O, y sobre OB llevamos $OD = 1$. Desde D traza-

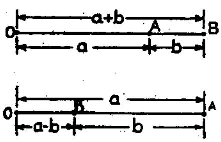

FIG. 27.—Construcción de $a + b$ y de $a - b$.

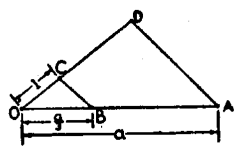

FIG. 28.—Construcción de $a/3$.

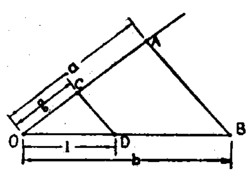

FIG. 29.—Construcción de a/b.

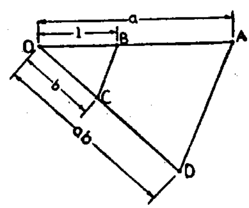

FIG. 30.—Construcción de ab.

mos una paralela a AB, que corta a OA en C. Entonces OC tendrá la longitud a/b. La construcción de ab se muestra en la figura 30, donde AD es una paralela a BC desde A. De estas consideraciones resulta que los *procesos algebraicos «racionales»*—adición, sustracción, multiplicación y división de cantidades conocidas—*pueden efectuarse por medio de construcciones geométricas.* A partir de segmentos dados, medidos por números reales $a, b, c, \ldots$ podemos, por sucesivas aplicaciones de estas sencillas construcciones, construir cualquier cantidad que sea expresable mediante $a, b, c, \ldots$ en forma racional; es decir, por medio de la aplicación reiterada de adiciones, restas, multiplicaciones y divisiones. La totalidad de las cantidades que pueden obtenerse en esta forma a partir de $a, b, c, \ldots$ constituye lo que se llama un *cuerpo de números*, un conjunto de números tal que toda operación racional aplicada a dos o más miembros del conjunto da a su vez lugar a un número del conjunto. Recordemos que los números racionales, los números reales y los números complejos son ejemplos de cuerpos de números. En el caso presente, el cuerpo se dice *engendrado* por los números dados a, b, c, ...

La nueva construcción decisiva, que nos lleva fuera del cuerpo así obtenido, es la extracción de una raíz cuadrada; dado un segmento a, $\sqrt{a}$ puede también construirse utilizando sólo la regla y el compás. Sobre una recta llevamos $OA = a$ y $AB = 1$ (Fig. 31). Trazamos una circunferencia con el segmento OB como diámetro y después la perpendicular a OB desde A, la cual corta a la circunferencia en C. El triángulo OBC tiene un ángulo recto en C, ya que es sabido por geometría elemental que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

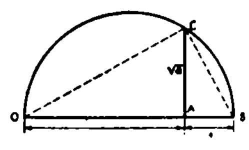

FIG. 31.—Construcción de $\sqrt{a}$.

Luego $\widehat{OCA} = \widehat{ABC}$ por ser semejantes los triángulos rectángulos OAC y CAB, y tenemos, para $x = AC$,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{1}, \qquad x^2 = a, \qquad x = \sqrt{a}\,.$$

2. Polígonos regulares.—Vamos a considerar ahora algunos problemas de construcción algo más complicados. Comencemos por el *decágono regular*. Supongamos que un decágono regular está inscrito en un círculo de radio 1 (Fig. 32) y llamemos x a su lado. Dado que x subtiende un ángulo central de 36°, los otros dos ángulos del triángulo deben valer cada uno 72°, y, por tanto, la recta de puntos que biseca al ángulo A divide al triángulo OAB en dos triángulos isósceles, cada uno con dos lados iguales de longitud x. El radio del círculo se ha dividido así en dos segmentos, x y $1 - x$. Por ser OAB semejante al triángulo isósceles menor se tiene $1/x = x/(1 - x)$. De esta proporción deducimos la ecuación cuadrática $x^2 + x - 1 = 0$, una de cuyas soluciones es $x = (\sqrt{5} - 1)/2$. (La otra solución debe desecharse por ser negativa.) De esto resulta evidente que se puede construir x geométricamente. Teniendo la longitud x podemos ahora construir el decágono regular, llevando su longitud como cuerda del círculo. El pentágono regular puede obtenerse sin más que unir de dos en dos los vértices del decágono regular.

Además de la construcción de $\sqrt{5}$ por el método de la figura 31, podemos

también obtenerlo como hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 1 y 2. Resulta x al restar la unidad de $\sqrt{5}$ y dividir el resultado por 2.

Los matemáticos griegos llamaban a la razón $OB : AB$ del problema precedente razón áurea, pues consideraban que un rectángulo cuyos lados estuviesen en esta relación era el más agradable estéticamente. Su valor, dicho sea de paso, es 1,62, aproximadamente.

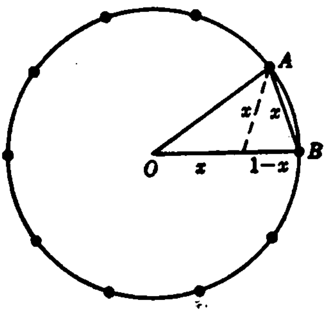

FIG. 32.—Decágono regular.

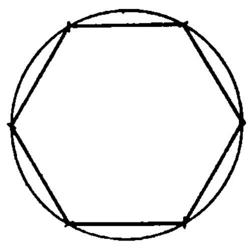

FIG. 33.—Hexágono regular.

De todos los polígonos regulares, el hexágono es el más sencillo de construir. Tracemos un círculo de radio r; la longitud del lado del hexágono regular inscrito en este círculo será entonces igual a r. El hexágono puede construirse llevando a partir de un punto de la circunferencia cuerdas de longitud r hasta obtener los seis vértices.

Del n-ágono regular podemos obtener el $2n$-ágono regular bisecando el arco subtendido en la circunferencia circunscrita por cada lado del n-ágono, utilizando también los puntos adicionales así obtenidos como vértices originales del $2n$-ágono pedido. Partiendo del diámetro de la circunferencia (ó «2-ágono»), podemos, por tanto, construir los polígonos de 4, 8, 16, ..., 2^n lados. Análogamente, es posible obtener los de 12, 24, 48 lados, etc., a partir del hexágono, y los de 20 y 40 lados, etc., partiendo del decágono.

Si s_n designa la longitud del lado del n-ágono regular inscrito en el círculo unidad (círculo de radio 1), entonces el lado del $2n$-ágono regular tiene la longitud

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}.$$

Esto puede demostrarse como sigue: en la figura 34, s_n es igual a $DE = 2DC$; $s_{2n} = DB$, y $AB = 2$. El área del triángulo rectángulo ABD es $^1/_2 BD \cdot AD =$

$= \frac{1}{2}AB \cdot CD$. Como $AD = \sqrt{AB^2 - DB^2}$, sustituyendo $AB = 2$, $BD = s_{2n}$, $CD = \frac{1}{2}s_n$, e igualando las dos expresiones del área, resulta

$$s_n = s_{2n}\sqrt{4 - s_{2n}^2} \qquad \text{o} \qquad s_n^2 = s_{2n}^2(4 - s_{2n}^2).$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática en $x = s_{2n}^2$ y observando que x debe ser menor que 2, se llega fácilmente a la fórmula anterior.

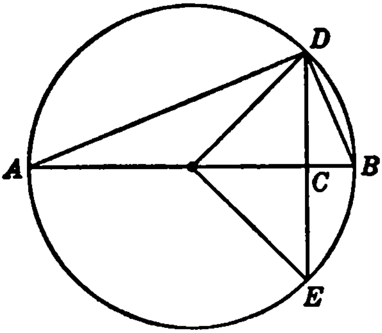

FIG. 34.

De esta fórmula y del hecho de que s_4 (lado del cuadrado) sea igual a $\sqrt{2}$ se deduce:

$$s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \qquad s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$s_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \text{ etc.}$$

Como fórmula general obtenemos para $n > 2$:

$$s_{2^n} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}$$

que incluye $n - 1$ raíces cuadradas sucesivas. El perímetro del 2^n-ágono regular inscrito será $2^n s_{2^n}$. Al tender n a infinito, el 2^n-ágono tiende a confundirse con la circunferencia, y, en consecuencia, $2^n s_{2^n}$ tiende a la longitud de la circunferencia del círculo unidad, que por definición es 2π. Obtenemos así, sustituyendo m por $n - 1$ y suprimiendo el factor 2, la fórmula asintótica para π:

$$2^m \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}_{m \text{ raíces cuadradas}} \to \pi \text{ cuando } m \to \infty.$$

Ejercicio: Puesto que $2^m \to \infty$ demuéstrese que

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ raíces cuadradas}} \to 2 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Los resultados obtenidos poseen el siguiente rasgo característico: *Los lados del 2^n-ágono, del $5 \cdot 2^n$-ágono, y del $3 \cdot 2^n$-ágono, pueden construirse mediante procesos de sumas, restas, productos, divisiones y extracciones de raíces cuadradas.*

***3. Problema de Apolonio.**—Otro problema de construcción, muy sencillo desde el punto de vista algebraico, es el famoso problema ya mencionado de los círculos tangentes de Apolonio. En lo que sigue no nos es necesario encontrar una construcción particularmente elegante; lo que importa es que, en principio, el problema pueda resolverse con regla y compás solamente. Daremos una breve indicación de la demostración y más adelante (véase pág. 173) veremos un método constructivo más elegante.

Supongamos que los centros de las circunferencias dadas tengan coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), y radios r_1, r_2 y r_3, respectivamente. Designemos el centro y el radio del círculo pedido por (x, y) y r. Entonces, la condición para que dicho círculo sea tangente a los tres dados se obtiene observando que la distancia entre los centros de dos círculos tangentes es igual a la suma o diferencia de los radios, según que éstos sean tangentes exterior o interiormente. Esto nos da las ecuaciones:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 = 0, \qquad [1]$$
$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r \pm r_2)^2 = 0, \qquad [2]$$
$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (r \pm r_3)^2 = 0, \qquad [3]$$

o bien,

$$x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_1 - 2yy_1 \pm 2rr_1 + x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 = 0, \qquad [1a]$$

etcétera. El signo $\pm$ debe elegirse en cada una de estas ecuaciones según que las circunferencias sean tangentes exterior o interiormente (véase Fig. 35). Las ecuaciones [1], [2], [3], son cuadráticas con tres incógnitas, x, y, r, y en las tres los términos de segundo grado son los mismos, como se ve en la forma desarrollada [1 a]. Por tanto, restando [2] de [1], obtendremos una ecuación lineal en x, y, r:

$$ax + by + cr = d, \qquad [4]$$

donde $a = 2(x_2 - x_1)$, etc. Análogamente, restando [3] de [1] tenemos otra ecuación lineal,

$$a'x + b'y + c'r = d'. \qquad [5]$$

Resolviendo [4] y [5] respecto a x e y en función de r, y sustituyendo en [1], tendremos una ecuación cuadrática en r, que puede resolverse por operaciones racionales y extracción de una raíz cuadrada (véase pág. 101). Habrá, en general, dos soluciones de esta ecuación, de las cuales sólo una es positiva. Después de determinar r mediante esta ecuación, obtendremos x e y de las dos ecuaciones lineales [4] y [5]. El círculo con centro (x, y) y radio r será tangente a los tres círculos dados. En todo el proceso hemos usado sólo operaciones ra-

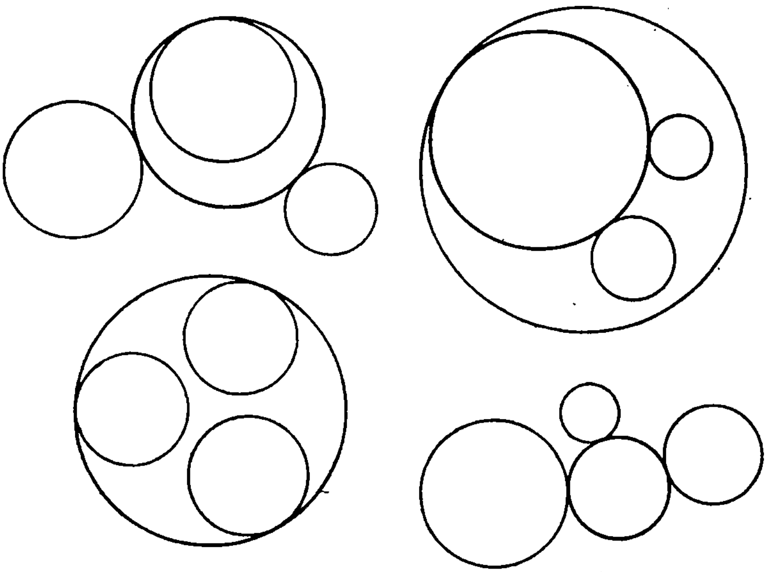

FIG. 35.—Círculos de Apolonio.

cionales y extracciones de raíces cuadradas. Síguese de ello que r, x e y pueden ser construídos con regla y compás.

Habrá, en general, ocho soluciones del problema de Apolonio, correspondientes a las $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ combinaciones posibles de los signos más y menos en las ecuaciones [1], [2] y [3]. Estas elecciones corresponden a las condiciones de que las circunferencias pedidas sean tangentes exterior o interiormente a cada uno de los tres círculos dados. Puede ocurrir que nuestro proceso algebraico no nos dé valores reales para x, y y r. Esto sucederá, p. ej., si los tres círculos dados son concéntricos, no existiendo entonces solución geométrica del problema. También cabe esperar posibles *degeneraciones* de la solución, como en el caso en que los tres círculos dados degeneren en tres puntos de una recta. Entonces, el círculo de Apolonio degenera en esta recta. No discutiremos estas posibilidades con detalle; el lector con alguna experiencia de álgebra podrá completar el análisis.

*II. NÚMEROS CONSTRUÍBLES Y CUERPOS DE NÚMEROS

1. Teoría general.—En nuestra discusión previa queda indicado el fondo algebraico general de las construcciones geométricas. Cada construcción con regla y compás consiste en una sucesión de operaciones de las enumeradas a continuación: 1) unir dos puntos por una recta; 2) hallar el punto de intersección de dos rectas; 3) trazar una circunferencia de radio y centro dados; 4) hallar los puntos de intersección de una circunferencia con otra circunferencia o con una recta. Un elemento (punto, recta, circunferencia) se considera conocido si se da desde el principio o si ha sido construído en algún paso previo. Para un análisis teórico, podemos referir la construcción en conjunto a un sistema de coordenadas x, y (véase pág. 82). Los elementos dados pueden representarse por puntos o segmentos en el plano x, y. Si sólo se da un segmento inicial, podemos tomarlo como unidad de longitud, lo que determina el punto $x = 1$, $y = 0$. A veces, aparecen elementos «arbitrarios»: se trazan líneas arbitrarias, se eligen puntos o radios arbitrarios. (Un ejemplo de elemento arbitrario aparece al construir el punto medio de un segmento: dibujamos dos circunferencias de radios iguales, pero arbitrarios, con sus centros en los extremos del segmento, y unimos sus intersecciones.) En tales casos, elegimos el elemento de manera que sea racional; es decir, los puntos arbitrarios, con coordenadas x, y racionales; las rectas arbitrarias $ax+by+c=0$, con coeficientes a, b, c racionales; los círculos arbitrarios, con centros de coordenadas racionales y radios racionales. Haremos siempre la elección de los elementos arbitrarios de manera que sean racionales; si los elementos son verdaderamente arbitrarios, esta restricción no puede afectar al resultado de la construcción.

Por sencillez, supondremos en la siguiente discusión que sólo se da un elemento inicial, el segmento de longitud 1. Según § I podemos construir con regla y compás todos los números que puedan deducirse de la unidad mediante procesos racionales de suma, resta, multiplicación y división; es decir, todos los números racionales r/s, siendo r y s enteros. El sistema de los números racionales es «cerrado» respecto a las operaciones racionales; esto es, la suma, diferencia, producto o cociente de dos números racionales—excluyendo, como siempre, la división por cero—es también un número racional. Todo conjunto de números que posea esta propiedad de ser cerrado respecto a las cuatro operaciones, se denomina *cuerpo de números.*

Ejercicio: Demuéstrese que todo cuerpo contiene al menos todos los números racionales. (*Indicación:* Si $a \neq 0$ es un número del cuerpo F, entonces $a/a = 1$ pertenece a F, y a partir de 1 se obtiene todo número racional por operaciones racionales.)

Partiendo de la unidad, podemos construir el cuerpo completo de los números racionales y, en consecuencia, todos los puntos racionales (es decir, los puntos con ambas coordenadas racionales) del plano x, y. Podemos obtener nuevos números, irracionales, haciendo uso del compás para construir, p. ej., el número $\sqrt{2}$, que, como sabemos por el capítulo II, § II, no pertenece al cuerpo racional. Habiendo construído $\sqrt{2}$ mediante las construcciones «racionales» de § I, podemos hallar todos los números de la forma

$$a + b\sqrt{2}, \tag{1}$$

siendo a y b racionales y, por tanto, construíbles. También podemos construir todos los números de la forma

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}),$$

donde a, b, c y d son racionales. Por otra parte, estos números pueden escribirse en la forma [1]; en efecto:

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} \cdot \frac{c - d\sqrt{2}}{c - d\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2} = p + q\sqrt{2},$$

siendo p y q racionales. (El denominador $c^2 - 2d^2$ no puede ser cero, pues si $c^2 - 2d^2 = 0$, entonces $\sqrt{2} = c/d$, lo que contradice la demostrada irracionalidad de $\sqrt{2}$.) Igualmente

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2} = r + s\sqrt{2},$$

siendo r y s racionales. De aquí que todo cuanto podemos obtener con la construcción de $\sqrt{2}$ es el conjunto de números de la forma [1], siendo a y b racionales y arbitrarios.

Ejercicio: Siendo $p = 1 + \sqrt{2}$, $q = 2 - \sqrt{2}$, $r = -3 + \sqrt{2}$ pónganse bajo la forma [1] los números

$$\frac{p}{q},\ p + p^2,\ (p - p^2)\frac{q}{r},\ \frac{pqr}{1 + r^2},\ \frac{p + qr}{q + pr^2}$$

Estos números [1] forman un *cuerpo*, como muestra la discusión precedente. (Es obvio que la suma y diferencia de dos números de la forma [1] tiene también la misma forma.) Este cuerpo es más amplio que el cuerpo racional, que es una parte o *subcuerpo* de él. Pero, naturalmente, es menos amplio que el cuerpo de *todos* los números reales. Llamemos al cuerpo racional F_0, y al nuevo cuerpo de números de la forma [1], F_1. La posibilidad de construir cualquier número del «cuerpo ampliado» F_1 ha sido ya establecida. Podemos ahora extender el alcance de nuestras construcciones, p. ej., tomando un número de F_1, tal como $k = 1 + \sqrt{2}$, y extrayendo la raíz cuadrada; obtenemos así el número construíble

$$\sqrt{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{k},$$

y con él, de acuerdo con § I, el cuerpo formado por todos los números

$$p + q\sqrt{k}, \qquad [2]$$

donde ahora p y q son números arbitrarios de F_1; es decir, de la forma $a + b\sqrt{2}$, con a, b de F_0, esto es, racionales.

Ejercicio: Represéntense en la forma [2] los números

$$(\sqrt{k})^3,\ \frac{1 + (\sqrt{k})^3}{1 + \sqrt{k}},\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{(\sqrt{k})^3 - 3},\ \frac{(1 + \sqrt{k})(2 - \sqrt{k})\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{1 + \sqrt{2}\,k}$$

Todos estos números han sido construídos en la hipótesis de un solo segmento dado inicialmente. Si se dan dos, elegiremos uno de ellos como unidad de longitud, y supondremos que la longitud del otro segmento medido con esta unidad es α. Entonces podemos construir el cuerpo G formado por todos los números de la forma

$$\frac{a_m\alpha^m + a_{m-1}\alpha^{m-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0}{b_n\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + b_1\alpha + b_0}$$

donde los números $a_0, \cdots, a_m$ y $b_0, \cdots, b_n$ son racionales, y m y n enteros positivos.

Ejercicio: Dados los segmentos de longitudes 1 y α, constrúyase $1 + \alpha + \alpha^2$, $(1 + \alpha)/(1 - \alpha)$, α^3.

Supongamos ahora, con mayor generalidad, que somos capaces de construir todos los números de un cuerpo F. Vamos a demostrar que *el uso de la regla sola no nos permitirá salir fuera del cuerpo* F. La ecuación de la recta que une los puntos de coordenadas a_1, b_1 y a_2, b_2, pertenecientes a F, es $(b_1 - b_2)x + (a_2 - a_1)y + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ (véase pág. 501); sus coeficientes son expresiones racionales formadas por números de F, y, por definición de cuerpo, también pertenecen a F. Además, si tenemos dos rectas $\alpha x + \beta y - \gamma = 0$ y $\alpha' x + \beta' y - \gamma' = 0$, con coeficientes de F, las coordenadas de su punto de intersección, halladas resolviendo este sistema de dos ecuaciones, son:

$$x = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, \quad y = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$$

Como éstos son también números de F, es evidente que el uso de la regla sola no nos permitirá salir fuera de los confines del cuerpo F.

Ejercicios: Las rectas $x + \sqrt{2}y - 1 = 0$, $2x - y + \sqrt{2} = 0$, tienen coeficientes del cuerpo [1]. Calcúlense las coordenadas de su punto de intersección, y verifíquese que tienen la forma [1].

Únanse los puntos $(1, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ mediante la recta $ax + by + c = 0$ y verifíquese que los coeficientes son de la forma [1].

Hágase lo mismo respecto al cuerpo [2] para las rectas

$$\sqrt{1 + \sqrt{2}}\,x + \sqrt{2}\,y = 1, \quad (1 + \sqrt{2})\,x - y = 1 - \sqrt{1 + \sqrt{2}},$$

y los puntos $(\sqrt{2}, -1)$, $(1 + \sqrt{2}, \sqrt{1 + \sqrt{2}})$, respectivamente.

Sólo podemos salir de los confines de F haciendo uso del compás. Para conseguir esto, elegimos un elemento k de F tal que $\sqrt{k}$ no pertenezca a F. Entonces podemos construir $\sqrt{k}$ y, por tanto, todos los números

$$a + b\sqrt{k}, \qquad [3]$$

donde a y b son racionales, o incluso elementos arbitrarios de F. La suma y diferencia de dos números $a + b\sqrt{k}$ y $c + d\sqrt{k}$, su producto, $(a + b\sqrt{k})(c + d\sqrt{k}) = (ac + kbd) + (ad + bc)\sqrt{k}$, y su cociente,

$$\frac{a + b\sqrt{k}}{c + d\sqrt{k}} = \frac{(a + b\sqrt{k})(c - d\sqrt{k})}{c^2 - kd^2} = \frac{ac - kbd}{c^2 - kd^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - kd^2}\sqrt{k},$$

son de nuevo de la forma $p + q\sqrt{k}$, siendo p y q de F. (El denominador $c^2 - kd^2$ no puede anularse, salvo que c y d sean ambos cero;

en caso contrario $\sqrt{k} = c/d$, sería un número de F, mientras hemos supuesto que $\sqrt{k}$ no pertenecía a F.) Luego el conjunto de números de la forma $a + b\sqrt{k}$ forma un cuerpo F', que contiene el cuerpo original F, pues podemos, en particular, elegir $b = 0$. F' se llama *cuerpo generalizado* o *extensión* de F, y F *subcuerpo* de F'.

Como ejemplo, sea F el cuerpo $a + b\sqrt{2}$, con a y b racionales y $k = \sqrt{2}$. Entonces, los números del cuerpo generalizado F' se representan por $p + q\sqrt[4]{2}$, siendo p y q de F, $p = a + b\sqrt{2}$, $q = a' + b'\sqrt{2}$, con a, b, a' y b' racionales. Todo número de F' puede ser reducido a esta forma; p. ej.,

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt[4]{2}}{(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[4]{2})} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt[4]{2}}{2 - \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt[4]{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} - \frac{(2 + \sqrt{2})}{4 - 2}\sqrt[4]{2} =$$

$$= (1 + \sqrt{2}) - (1 + {}^1/_2\sqrt{2})\sqrt[4]{2}.$$

Ejercicio: Sea F el cuerpo $p + q\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, donde p y q son de la forma $a + b\sqrt{2}$, y a y b racionales. Represéntese en esa forma el número

$$\frac{1 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2 - 3\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Hemos visto que si partimos de un cuerpo F de números *construibles* que contiene el número k, entonces, por medio de la regla y una única utilización del compás podemos construir $\sqrt{k}$ y, en consecuencia, todos los números de la forma $a + b\sqrt{k}$, en tanto que a y b sean de F.

Recíprocamente, probaremos ahora que, mediante una sola aplicación del compás, podemos obtener *sólo* números de esta forma. Pues lo que el compás realiza en una construcción es definir puntos (o sus coordenadas) como intersecciones de una circunferencia y una recta, o de dos circunferencias. La circunferencia de centro ξ, η y radio r tiene como ecuación $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r^2$; luego si ξ, η y r pertenecen a F, la ecuación podrá escribirse en la forma:

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0,$$

con coeficientes α, β y γ de F. Una recta $ax + by + c = 0$, que une dos puntos cuyas coordenadas están en F, tiene coeficientes a, b, c de F, como ya hemos visto (pág. 141). Eliminando y entre estas dos ecuaciones obtenemos para la abscisa x de un punto de intersección de la circunferencia y la recta una ecuación cuadrática de la forma $Ax^2 + Bx + C = 0$, cuyos coeficientes A, B, C, de F, son $A = a^2 + b^2$, $B = 2(ac + b^2\alpha - ab\beta)$, $C = c^2 - 2bc\beta + b^2\gamma$. La solución viene dada por la fórmula

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

que es de la forma $p + q\sqrt{k}$, con p, q, k de F. Una fórmula análoga nos da la ordenada y del punto de intersección.

Por otra parte, si tenemos dos circunferencias:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma &= 0, \\ x^2 + y^2 + 2\alpha' x + 2\beta' y + \gamma' &= 0, \end{aligned}$$

restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos la ecuación lineal

$$2(\alpha - \alpha')x + 2(\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma') = 0,$$

que puede resolverse junto con la ecuación de la primera circunferencia, como antes. En uno y otro caso, la construcción da las coordenadas x e y del punto o de los dos nuevos puntos, y estas cantidades son de la forma $p + q\sqrt{k}$, con p, q, k de F. En particular, naturalmente, $\sqrt{k}$ puede pertenecer a F; p. ej., cuando sea $k = 4$. Entonces la construcción no proporciona nada esencialmente nuevo, y no salimos de F. Pero éste no es el caso general.

Ejercicio: Considérese el círculo de radio $2\sqrt{2}$ con centro en el origen, y la recta que une los puntos $(1/2, 0)$, $(4\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Hállese el cuerpo F' determinado por las coordenadas de los puntos de intersección de la circunferencia y la recta. Hágase lo mismo respecto de la intersección de la circunferencia dada con la de radio $\sqrt{2}/2$ y centro $(0, 2\sqrt{2})$.

Resumiendo otra vez: dadas ciertas cantidades iniciales, podemos construir sólo con la regla todas las cantidades del cuerpo F engendrado mediante procesos racionales a partir de las cantidades dadas. Utilizando el compás, es posible extender el cuerpo F de las cantidades construíbles a un cuerpo más amplio, eligiendo un número k de F, extrayendo su raíz cuadrada y construyendo el cuerpo F' formado por todos los números de la forma $a + b\sqrt{k}$, donde a y b son de F.

Éste es un subcuerpo de F', porque todas las cantidades de F están también contenidas en F', ya que en la expresión $a + b\sqrt{k}$ podemos elegir $b = 0$. (Se supone que $\sqrt{k}$ es un nuevo número no perteneciente a F, pues de otro modo el proceso de adjunción de $\sqrt{k}$ no haría variar la situación, y F' sería idéntico a F.) Hemos probado que todo paso en una construcción geométrica (trazado de la recta que une dos puntos, de la circunferencia de centro y radio dados, o determinación de la intersección de dos rectas o circunferencia conocidas) puede, bien producir cantidades del cuerpo ya conocido o, mediante la construcción de una raíz cuadrada, dar lugar a un nuevo cuerpo ampliado de números *construíbles*.

La totalidad de los números *construíbles* puede ser descrita ahora con precisión. Partimos de un cuerpo dado F_0, definido por cantidades iniciales dadas; p. ej., el cuerpo de todos los números racionales, si sólo se da un segmento, elegido como unidad. A continuación, mediante la adjunción de $\sqrt{k_0}$, donde k_0 es de F_0, pero no $\sqrt{k_0}$, formamos el cuerpo ampliado F_1 de números *construíbles*, que consta de todos los números de la forma $a_0 + b_0\sqrt{k_0}$, en que a_0 y b_0 son números cualesquiera de F_0. Después se define F_2, nueva extensión de F_1, como conjunto de todos los números de la forma $a_1 + b_1\sqrt{k_1}$, siendo a_1 y b_1 números de F_1, y k_1 un número de F_1 cuya raíz cuadrada no está en F_1. Repitiendo este proceso, podemos obtener un cuerpo F_n después de n adjunciones de raíces cuadradas. *Números construíbles son aquellos y sólo aquellos que pueden hallarse mediante una tal sucesión de cuerpos ampliados, esto es, que pertenecen a un cuerpo* F_n *del tipo descrito.* La magnitud del número n de extensiones necesarias no importa; sólo mediría el grado de complejidad del problema.

El siguiente ejemplo puede aclarar el proceso. Deseamos obtener el número

$$\sqrt{6+\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5}}.$$

Sea F_0 el cuerpo de los números racionales. Hagamos $k_0 = 2$, obteniendo el cuerpo F_1, que contiene el número $1 + \sqrt{2}$. Ahora tomamos $k_1 = 1 + \sqrt{2}$ y $k_2 = 3$. Por supuesto, 3 está en el cuerpo original F_0, y *a fortiori* en el cuerpo F_2, por lo cual es perfectamente lícito elegir $k_2 = 3$. Luego tomamos $k_3 = \sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}$, y, finalmente, $k_4 = \sqrt{\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}} + 5$. El cuerpo F_5 así construído contiene el número deseado, pues $\sqrt{6}$ está a su vez en F_5, ya que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, y en consecuencia su producto, están en F_3 y también, por tanto, en F_5.

Ejercicios: Verifíquese que, partiendo del cuerpo racional, el lado del 2^m-ágono regular (véase pág. 135) es un número *construíble*, con $n = m - 1$. Determínese la sucesión de cuerpos generalizados. Hágase lo mismo con los números

$$\sqrt{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}, \qquad (\sqrt{5} + \sqrt{11})/(1 + \sqrt{7 - \sqrt{3}}),$$
$$(\sqrt{2 + \sqrt{3}})\ (\sqrt[4]{2} + \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{7}}}).$$

2. Todos los números construíbles son algebraicos.—Si el cuerpo F_0, inicial, es el cuerpo racional engendrado por un único segmento, entonces todos los números construíbles son algebraicos (véase pág. 112). Los números del cuerpo F_1 son raíces de ecuaciones cuadráticas, los de F_2, raíces de ecuaciones de cuarto grado, y, en general, los números de F_k son raíces de ecuaciones de grado 2^k, con coeficientes racionales. Para probar esto para el cuerpo F_2, consideremos como ejemplo $x = \sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$. Tenemos $(x - \sqrt{2})^2 = 3 + \sqrt{2}$; $x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x = 3 + \sqrt{2}$, ó $x^2 - 1 = \sqrt{2}\,(2x + 1)$, ecuación cuadrática con coeficientes del cuerpo F_1. Si elevamos al cuadrado, obtenemos finalmente

$$(x^2 - 1)^2 = 2(2x + 1)^2,$$

que es una ecuación de cuarto grado con coeficientes racionales.

En general, todo número del cuerpo F_2 tendrá la forma

$$x = p + q\sqrt{w}, \tag{4}$$

donde p, q y w pertenecen al cuerpo F_1 y, por ello, son de la forma $p = a + b\sqrt{s}$, $q = c + d\sqrt{s}$, $w = e + f\sqrt{s}$, siendo a, b, c, d, e, f y s racionales. De [4] tenemos

$$x^2 - 2px + p^2 = q^2w,$$

cuyos coeficientes pertenecen todos al cuerpo F_1, engendrado por $\sqrt{s}$. Por tanto, esta ecuación puede escribirse en la forma

$$x^2 + ux + v = \sqrt{s}(rx + t),$$

siendo r, s, t, u y v racionales. Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos una ecuación de cuarto grado

$$(x^2 + ux + v)^2 = s(rx + t)^2 \tag{5}$$

con coeficientes racionales, según queríamos ver.

Ejercicios: 1. Hállense ecuaciones con coeficientes racionales para:
a) $x = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$; b) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; c) $x = 1/\sqrt{5 + \sqrt{3}}$.

2. Hállense por métodos análogos ecuaciones de octavo grado para:
a) $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$; b) $x = \sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{3}}$; c) $x = 1 + \sqrt{5 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$.

Para demostrar el teorema general si x es un cuerpo F_k con k arbitrario, probaríamos, mediante el procedimiento usado antes, que x satisface a una ecuación cuadrática con coeficientes de F_{k-1}. Repitiendo este procedimiento encontraríamos que x satisface a una ecuación de grado $2^2 = 4$ con coeficientes de F_{k-2}, etc.

Ejercicio: Complétese por inducción la demostración general para probar que x satisface a una ecuación de grado 2^l con coeficientes de F_{k-l}, siendo, $0 < l < k$. Este enunciado para $l = k$ es el teorema deseado.

*III. IRRESOLUBILIDAD DE LOS TRES PROBLEMAS GRIEGOS

1. Duplicación del cubo.—Estamos ahora en condiciones de investigar los viejos problemas de trisección del ángulo, duplicación del cubo y construcción del heptágono regular. Comenzaremos por el primero; si se da un cubo cuya arista es la unidad de longitud, su volumen será la unidad de volumen; se desea encontrar la arista x de un cubo cuyo volumen sea el doble. Dicha arista satisfará a la sencilla ecuación cúbica:

$$x^3 - 2 = 0. \qquad [1]$$

Nuestra demostración de que el número x no puede construirse con regla y compás es indirecta. Supondremos de momento que tal construcción es posible. Según lo dicho antes, esto significa que x pertenece a algún cuerpo F_k deducido, como ya se vió, del cuerpo racional, mediante sucesivas ampliaciones obtenidas por adjunción de raíces cuadradas. Como veremos, esta hipótesis nos lleva a una consecuencia absurda.

Sabemos ya que x no pertenece al cuerpo racional F_0, pues $\sqrt[3]{2}$ es un número irracional (Ej. 1, pág. 69). Luego x puede pertenecer sólo a algún cuerpo F_k, siendo k un entero positivo. Podemos suponer que k es el *menor* número entero positivo tal que x esté en algún F_k. Resulta entonces que x puede escribirse en la forma

$$x = p + q\sqrt{w},$$

donde p, q y w pertenecen a algún F_{k-1}, pero $\sqrt{w}$ no. A continuación, mediante un simple pero importante tipo de razonamiento algebraico, probaremos que si $x = p + q\sqrt{w}$ es una solución de la ecuación cúbica [1], entonces $y = p - q\sqrt{w}$ es también solución. Como x está en el cuerpo F_k, también x^3 y $x^3 - 2$ estarán en F_k, y tendremos

$$x^3 - 2 = a + b\sqrt{w}. \qquad [2]$$

en donde a y b pertenecen a F_{k-1}. Mediante un sencillo cálculo resulta $a = p^3 + 3pq^2w - 2$, $b = 3p^2q + q^3w$. Si hacemos

$$y = p - q\sqrt{w},$$

y sustituímos q por $-q$ en estas expresiones de a y b, vemos que

$$y^3 - 2 = a - b\sqrt{w}. \qquad [2']$$

Supongamos ahora que x es raíz de $x^3 - 2 = 0$, y, por tanto,

$$a + b\sqrt{w} = 0. \qquad [3]$$

Esto implica—y aquí está la clave del argumento—que a y b son iguales a cero. Pues si b no fuera cero, podríamos deducir de [3] que $\sqrt{w} = -a/b$, y $\sqrt{w}$ sería un número del cuerpo F_{k-1} al que pertenecen a y b, contrariamente a nuestra hipótesis. Siendo, pues, $b = 0$, se sigue inmediatamente de [3] que también $a = 0$.

Una vez visto que $a = b = 0$, es consecuencia inmediata de [2'] que $y = p - q\sqrt{w}$ es también solución de la ecuación cúbica [1], por ser $y^3 - 2 = 0$. Además, $y \neq x$; es decir, $x - y \neq 0$, pues $x - y = 2q\sqrt{w}$ sólo puede anularse si $q = 0$, de donde $x = p$ pertenecería a F_{k-1}, contra lo supuesto.

Hemos probado así que si $x = p + q\sqrt{w}$ es una solución de la ecuación cúbica [1], también $y = p - q\sqrt{w}$ es otra solución diferente de esta ecuación, lo que entraña una evidente contradicción, pues hay un único número real x que es raíz cúbica de 2, siendo las otras dos raíces cúbicas imaginarias (véase pág. 107); $y = p - q\sqrt{w}$ es, sin embargo, real, ya que p, q, y $\sqrt{w}$ son reales.

La hipótesis hecha nos ha llevado a un absurdo, quedando así demostrada su falsedad. Una solución de [1] no puede estar en el cuerpo F_k; es decir, es imposible duplicar el cubo con regla y compás.

2. Un teorema sobre ecuaciones cúbicas.—El razonamiento algebraico que acabamos de utilizar ha sido adaptado especialmente al problema particular analizado. Si deseamos ocuparnos de los otros dos problemas clásicos, es preferible proceder sobre una base más general. Los tres problemas dependen algébricamente de ecuaciones cúbicas. Un hecho fundamental concerniente a la ecuación cúbica

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \qquad [4]$$

es la relación siguiente entre las tres raíces x_1, x_2, x_3 de la misma:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a \ *. \qquad [5]$$

Consideremos la ecuación cúbica [4] con coeficientes a, b, c, racionales. Puede suceder que una de las raíces de la ecuación sea racional; p. ej., la ecuación $x^3 - 1 = 0$ tiene la raíz racional 1, mientras que las otras dos raíces, dadas por la ecuación cuadrática $x^2 + x + 1 = 0$, son necesariamente imaginarias. Pero podemos demostrar fácilmente el siguiente teorema general: *Si una ecuación cúbica de coeficientes racionales no tiene raíz racional, ninguna de sus raíces es construíble partiendo del cuerpo racional* F_0.

Daremos nuevamente una demostración por reducción al absurdo. Supongamos que x fuera una raíz construíble de [4]. Entonces x pertenecería al último cuerpo F_k de alguna cadena de cuerpos sucesivamente ampliados F_0, F_1 ... F_k, como antes. Supondremos que k es el *menor* entero tal que una raíz de la ecuación cúbica [4] pertenece a F_k. Por supuesto que k debe ser mayor que cero, ya que en el enunciado del teorema se supone que ninguna raíz x pertenece al cuerpo racional F_0; luego x puede escribirse en la forma

$$x = p + q\sqrt{w},$$

donde p, q, w pertenecen al cuerpo precedente F_{k-1}, pero $\sqrt{w}$ no. Sigue de ello, exactamente como para la ecuación particular $z^3 - 2 = 0$ anterior, que otro número de F_k,

$$y = p - q\sqrt{w},$$

será también solución de la ecuación [4]. Como antes, podremos ver que $q \neq 0$ y, por tanto, $x \neq y$.

De [5] resulta que la tercera raíz de la ecuación [4] está dada por $u = -a - x - y$. Pero, dado que $x + y = 2p$, esto significa que

$$u = -a - 2p,$$

y como $\sqrt{w}$ ha desaparecido, u es un número del cuerpo F_{k-1}. Esto contradice la hipótesis de que k es el *menor* número tal que algún F_k contiene a una raíz de [4]; en consecuencia, la hipótesis es absurda, y

* El polinomio $z^3 + az^2 + bz + c$ puede descomponerse en el producto $(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)$, siendo x_1, x_2, x_3 las raíces de la ecuación [4] (véase pág. 110). Por tanto,

$$z^3 + az^2 + bz + c = z^3 - (x_1 + x_2 + x_3)z^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)z - x_1x_2x_3,$$

y como el coeficiente de cada potencia debe ser el mismo en ambos miembros, resulta:

$$-a = x_1 + x_2 + x_3, \qquad b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \qquad -c = x_1x_2x_3.$$

ninguna raíz de [4] pertenece a ningún cuerpo F_k. El teorema general está demostrado. Basándose en este teorema quedará probada la imposibilidad de una construcción con regla y compás si el equivalente algebraico del problema resulta ser solución de una ecuación cúbica desprovista de raíces racionales. Esta equivalencia es obvia para el problema de duplicar el cubo, y vamos a establecerla para los otros dos problemas griegos.

3. Trisección del ángulo.—Vamos a demostrar que la trisección del ángulo con la regla y el compás es, *en general*, imposible. Naturalmente, existen ángulos como los de 90° y 180°, para los cuales es posible la trisección. Lo que vamos a demostrar es que la trisección no puede efectuarse por un método válido para *todo* ángulo. Para ello basta considerar un ángulo que no pueda trisecarse, ya que un *método general* debería ser válido para cualquier ejemplo. Por consiguiente, la no existencia de un método general puede probarse si se demuestra que el ángulo de 60°, p. ej., no puede ser trisecado sólo con el auxilio de la regla y el compás.

Podemos obtener un equivalente algebraico de este problema de diferentes formas; la más sencilla consiste en considerar el ángulo por su coseno: $\cos\theta = g$. Entonces, el problema es el de encontrar la cantidad $x = \cos(\theta/3)$. Mediante una sencilla fórmula trigonométrica (véase pág. 106) el coseno de $\theta/3$ se halla ligado con el de θ por la ecuación

$$\cos\theta = g = 4\cos^3(\theta/3) - 3\cos(\theta/3).$$

En otras palabras, el problema de trisecar el ángulo θ, con $\cos\theta=g$, equivale a construir una solución de la ecuación cúbica

$$4z^3 - 3z - g = 0. \qquad [6]$$

Para probar que en general no puede hacerse esto, tomemos $\theta=60°$, de donde $g = \cos 60° = 1/2$, y la ecuación [6] se convierte en

$$8z^3 - 6z = 1. \qquad [7]$$

En virtud del teorema antes demostrado, basta probar que esta ecuación no tiene raíz racional. Haciendo $v = 2z$, la ecuación se transforma en

$$v^3 - 3v = 1. \qquad [8]$$

Si hubiera un número racional $v = r/s$ que verificara esta ecuación (r y s primos entre sí), tendríamos $r^3 - 3s^2r = s^3$; de donde $s^3 = r(r^2 - 3s^2)$ sería divisible por r, y r y s tendrían un factor común, a menos que $r = \pm 1$. Asimismo, s^2 divide a $r^3 = s^2(s + 3r)$, lo que supone que r y s tienen algún factor común, salvo que $s = \pm 1$. Como hemos supuesto que s y r carecen de factor común, vemos que los únicos números racionales que pueden verificar la ecuación [8] son $+1$ ó -1. Pero sustituyendo $+1$ y -1 en lugar de v en [8] vemos que ninguno de ambos la satisface; luego [8] y, en consecuencia, [7] carecen de raíz racional, y la imposibilidad de trisecar el ángulo queda demostrada.

Este teorema de que un ángulo no puede ser trisecado con regla y compás sólo es cierto cuando la regla se usa *exclusivamente* como instrumento para trazar la recta determinada por dos puntos. En nuestra caracterización general de los números construíbles, el uso de la regla se ha limitado siempre a esta operación; si se permiten otros usos de la regla, la totalidad de las construcciones posibles puede extenderse enormemente. El siguiente método para trisecar el ángulo, utilizado en las obras de Arquímedes, es un buen ejemplo. Sea x un ángulo arbitrario dado, como en la figura 36. Prolonguemos la base del ángulo por la izquierda y tracemos un semicírculo con centro en 0 y radio arbitrario r. Señalemos dos puntos A y B en el borde de la regla, tales que $AB = r$. Manteniendo el punto B en la semicircunferencia, deslicemos la regla haciendo que A caiga sobre la prolongación del lado inicial del ángulo x, mientras el borde de la regla pasa por la intersección C del segundo lado del ángulo x con la semicircunferencia de centro O. Con la regla en esta posición tracemos una recta, que forma un ángulo y con la prolongación del lado inicial del ángulo x.

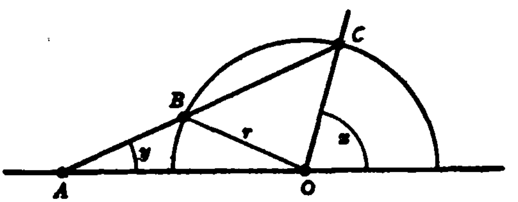

FIG. 36.—Trisección de un ángulo (Arquímedes).

Ejercicio: Demuéstrese que esta construcción nos da $y = x/3$.

4. El heptágono regular.—Vamos a considerar ahora el problema de hallar el lado z de un heptágono regular inscrito en la circunferencia unidad. La forma más sencilla de tratar este problema es utilizar los números complejos (Cap. II, V); sabemos que los vértices del heptágono están dados por las raíces de la ecuación

$$z^7 - 1 = 0, \qquad [9]$$

siendo las coordenadas x, y de los vértices las partes real e imaginaria del número complejo $z = x + yi$. Una solución de esta ecuación es $z = 1$, y las otras son las raíces de la ecuación

$$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0, \qquad [10]$$

obtenida de [9] dividiendo por el factor $z - 1$ (pág. 108). Dividiendo [10] por z^3, obtenemos la ecuación

$$z^3 + 1/z^3 + z^2 + 1/z^2 + z + 1/z + 1 = 0. \qquad [11]$$

Mediante una sencilla transformación algebraica, podemos escribir [11] en la forma:

$$(z + 1/z)^3 - 3(z + 1/z) + (z + 1/z)^2 - 2 + (z + 1/z) + 1 = 0. \qquad [12]$$

Designando $z + 1/z$ por y, de [12] deducimos:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0. \qquad [13]$$

Sabemos que z, raíz séptima de la unidad, está dada por

$$z = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi, \qquad [14]$$

donde $\varphi = 360°/7$ es el ángulo central subtendido por el lado del heptágono regular; asimismo sabemos (Ej. 2, pág. 106) que $1/z = \cos\varphi - - i \operatorname{sen}\varphi$; es decir, $y = z + 1/z = 2\cos\varphi$.

Si es posible construir y, podremos también construir $\cos\varphi$, y recíprocamente. Luego si podemos probar que y no es construíble, quedará al mismo tiempo probado que z, y, por tanto, el heptágono, no es construíble. De esta forma, en virtud del teorema antes demostrado, queda solamente por probar que la ecuación [13] no tiene raíces racionales. Esto también será probado por reducción al absurdo. Supongamos que [13] tiene una raíz racional r/s (r y s primos entre sí). Tenemos

$$r^3 + r^2s - 2rs^2 - s^3 = 0; \qquad [15]$$

donde se ve como antes que r^3 es divisible por s, y s^3 por r. Como s y r son primos entre sí, cada uno debe ser igual a ± 1; por tanto, si y es racional, sólo puede tomar los valores $+1$ y -1. Sustituyendo estos números en la ecuación, vemos que ninguno de ellos la satisface. Luego y, y por ende el heptágono regular, no es construíble.

5. Observaciones acerca de la cuadratura del círculo.—Hemos logrado tratar estos problemas de duplicar el cubo, trisecar el ángulo y construir el heptágono regular, mediante métodos relativamente elementales. El problema de la cuadratura del círculo es mucho más difícil y requiere la técnica del análisis matemático superior. Como un círculo de radio r tiene área πr^2, el problema de construir un cuadrado de área igual a la de un círculo de radio unidad equivale a la construcción de un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$, lado del cuadrado pedido. Este segmento será construíble si, y sólo si, el número π es construíble. En virtud de nuestra caracterización general de los números construíbles, podemos demostrar la imposibilidad de cuadrar el círculo probando que el número π no puede estar contenido en ningún cuerpo F_k que pueda deducirse del cuerpo racional F_0 mediante sucesivas adjunciones de raíces cuadradas. Como todos los elementos de tal cuerpo son números algebraicos, es decir, números que satisfacen a ecuaciones algebraicas de coeficientes enteros, nos basta con probar que el número π no es algebraico; es decir, que es *trascendente* (véase pág. 112).

La técnica necesaria para establecer que π es un número trascendente fué creada por Charles Hermite (1822-1905), quien demostró que el número e es trascendente. Mediante un ligero perfeccionamiento del método de Hermite, F. Lindemann consiguió (1882) probar la trascendencia de π, poniendo fin para siempre a la vieja cuestión de la cuadratura del círculo. La demostración está al alcance del estudiante de análisis superior, pero excede los fines de este libro.

PARTE SEGUNDA

VARIOS MÉTODOS PARA OBTENER CONSTRUCCIONES

IV. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS. INVERSIÓN

1. Observaciones generales.—En la segunda parte de este capítulo vamos a discutir de forma sistemática algunos principios generales que pueden aplicarse a los problemas de construcción. Muchos de estos problemas pueden dominarse con más claridad desde el punto de vista general de las «transformaciones geométricas»; en lugar de estudiar una construcción particular, vamos a considerar simultáneamente la totalidad de los problemas ligados por ciertos procesos de transformación. El poder de síntesis aclaratoria del concepto de clase de transformaciones geométricas no está en modo alguno restringido a los problemas de construcción, sino que afecta a casi toda la geometría. En los capítulos IV y V nos ocuparemos de este aspecto general de las transformaciones geométricas, limitándonos ahora a estudiar un tipo particular de transformación: la inversión respecto a una circunferencia del plano, que es una generalización de la simetría ordinaria respecto a una recta.

Por *transformación* o *representación* del plano en sí mismo entendemos una ley que asigna a cada punto P del plano otro punto P', llamado *imagen* de P en la transformación; el punto P se llama *antecedente* de P'. Un ejemplo sencillo de tal transformación es la simetría del plano respecto de una recta L, como en un espejo; un punto P, situado a un lado de L, tiene como imagen el punto P' del otro lado de L, y tal que L es la mediatriz del segmento PP'. Una transformación puede dejar fijos ciertos puntos del plano; en el caso de la simetría, esto ocurre para los puntos de L.

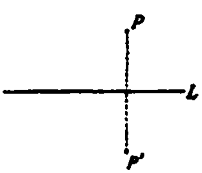

FIG. 37.—Simetría de un punto respecto a una recta.

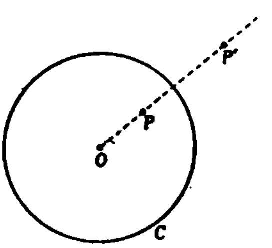

FIG. 38.—Inversión de un punto respecto a una circunferencia.

Otros ejemplos de transformaciones son: las *rotaciones* del plano alrededor de un punto fijo O; las *traslaciones* paralelas, que trasladan cada punto una distancia d en una dirección dada (tales transformaciones no dejan puntos fijos); y, más en general, los *movimientos rígidos* del plano, que pueden imaginarse como compuestos de rotaciones y traslaciones paralelas.

La clase particular de transformaciones que ahora nos interesa es la de las *inversiones* respecto a circunferencias. (Algunas veces llamadas *reflexiones circulares*, debido a que representan con cierta aproximación la relación entre el objeto y la imagen en una reflexión sobre un espejo circular.) En un plano dado, sea C una circunferencia de centro O (llamado centro de la inversión) y radio r. Definimos como imagen del punto P, el punto P' de la recta OP, situado del mismo lado de O que P, y tal que cumple la condición

$$OP \cdot OP' = r^2. \qquad [1]$$

Los puntos P y P' se denominan *puntos inversos* respecto a C. De esta definición concluímos que si P' es el punto inverso de P, a su vez P es el inverso de P'. Una inversión intercambia el interior y el exterior del círculo C, ya que para $OP < r$ tenemos $OP' > r$, y para $OP > r$, $OP' < r$. Los únicos puntos del plano que quedan fijos en la inversión son los puntos de la circunferencia C.

La regla [1] no define una imagen para el centro O. Es evidente que si un punto P móvil lo aproximamos a O, la imagen P' se aleja cada vez más en el plano. Por esta razón decimos a veces que O corresponde al *punto del infinito* en la inversión. La utilidad de esta forma de hablar reside en el hecho de permitirnos asegurar que una inversión establece una correspondencia entre los puntos del plano y sus imágenes, que es biunívoca sin excepción: cada punto del plano tiene una imagen y sólo una, y él mismo es imagen de un punto y sólo uno. Todas las transformaciones consideradas anteriormente gozan de esta propiedad.

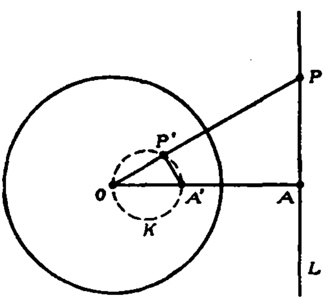

FIG. 39.—Inversión de una recta L respecto a una circunferencia.

2. Propiedades de la inversión.—La propiedad más importante de la inversión es la de que transforma rectas y circunferencias en rectas y circunferencias. Con más precisión, vamos a ver que en una inversión:

a) Una recta que pasa por O se transforma en una recta que pasa por O.

b) Una recta que no pasa por O se transforma en una circunferencia que pasa por O.

c) Una circunferencia que pasa por O se transforma en una recta que no pasa por O.

d) Una circunferencia que no pasa por O se transforma en una circunferencia que no pasa por O.

La proposición *a)* es obvia, ya que por definición de inversión todo punto de la recta tiene como imagen otro punto de la misma; es decir, que aunque los puntos de la recta se intercambian, la recta como totalidad se transforma en sí misma.

Para probar *b)* tracemos una perpendicular desde O a la recta L (Fig. 39). Sea A el punto donde esta perpendicular corta a L, y A'

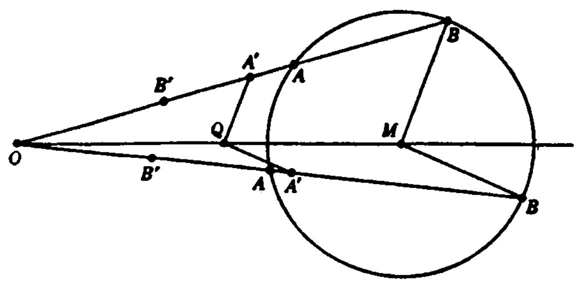

FIG. 40.—Inversión de una circunferencia.

el inverso de A. Tomemos un punto cualquiera P de L, y sea P' su inverso. Como $OA' \cdot OA = OP' \cdot OP = r^2$, resulta que

$$OA'/OP' = OP/OA.$$

Por tanto, los triángulos $OP'A'$ y OAP son semejantes y el ángulo $OP'A'$ es recto. Por geometría elemental sabemos que P' está en la circunferencia K de diámetro OA', de donde la inversa de L es esta circunferencia. Esto prueba *b)*. La proposición *c)* se demuestra por el hecho de que si K es la inversa de L, la inversa de K es L.

Queda por demostrar la proposición *d)*. Sea K una circunferencia que no pasa por O, de centro M y radio k. Para obtener su imagen, tracemos una recta por O que corte a K en A y B, y veamos cómo varían las imágenes A' y B' cuando la recta que pasa por O corta a K de todas las formas posibles. Designemos las distancias OA, OB, OA', OB', OM por a, b, a', b', m, y sea t la longitud de la tangente a K desde O. Tenemos $aa' = bb' = r^2$, por definición de inversión, y $ab = t^2$, por una propiedad geométrica elemental del círculo. Si dividimos las primeras relaciones por la segunda, resulta

$$a'/b = b'/a = r^2/t^2 = c^2,$$

donde c^2 es una constante que depende sólo de r y t, y es la misma para todas las posiciones de A y B. Por A' trazamos una paralela a BM que corta a OM en Q. Sea $OQ = q$, y $A'Q = \rho$; entonces $q/m = a'/b = \rho/k$, o sea

$$q = ma'/b = mc^2, \qquad \rho = ka'/b = kc^2.$$

Esto significa que para todas las posiciones de A y B, Q será siempre el mismo punto de OM, y la distancia $A'Q$ tendrá siempre el mismo valor. Además, $B'Q = \rho$, ya que $a'/b = b'/a$. Así, las imágenes de todos los puntos A, B, de K, son puntos cuyas distancias a Q son iguales a ρ; es decir, la imagen de K es una circunferencia. Esto prueba *d)*.

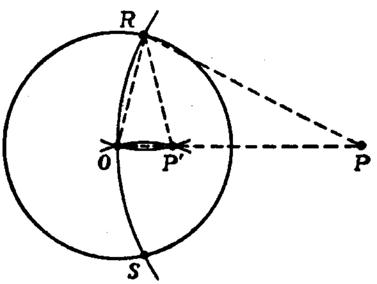

FIG. 41.—Inversión de un punto exterior respecto a una circunferencia.

3. Construcción geométrica de puntos inversos.—El siguiente teorema nos será útil en el párrafo próximo: *El punto* P', *inverso de un punto dado* P *respecto a una circunferencia* C, *puede ser construído geométricamente mediante el solo uso del compás.* Consideremos primero el caso en que el punto dado P sea exterior a C. Con OP como radio y centro en P describimos un arco que corte a C en los puntos R y S. Con estos dos puntos como centros describimos arcos de radio r que se cortan en O y en el punto P' de la recta OP. En los triángulos isósceles ORP y ORP' se verifica

$$\widehat{ORP} = \widehat{POR} = \widehat{OP'R},$$

luego estos triángulos son semejantes, y se tiene:

$$\frac{OP}{OR} = \frac{OR}{OP'}; \quad \text{esto es,} \quad OP \cdot OP' = r^2.$$

El punto P' así construído es, por tanto, el inverso de P.

Si el punto dado P es interior a C, subsiste la misma construcción, siempre que la circunferencia de radio OP y centro P corte a C en dos puntos. Si no la corta, podemos reducir la construcción del punto inverso P' al caso anterior mediante el siguiente artificio:

Observemos primero que con el solo uso del compás podemos encontrar un punto C de la recta que une dos puntos dados A, O, y tal que $AO = OC$. Para esto, tracemos una circunferencia de centro O y radio $r = OA$, y llevemos sobre esta circunferencia a partir de A, los puntos P, Q, C, tales que $AP = PQ = QC = r$. Entonces C es el punto deseado, como se ve por el hecho de que los triángulos AOP, OPQ, OQC son equiláteros; es decir, OA y OC forman un ángulo de 180°, y $OC = OQ = AO$. Repitiendo este procedimiento, podemos fácilmente prolongar AO un número deseado de veces. Incidentalmente, como la longitud del segmento AQ es $r\sqrt{3}$, como el lector puede verificar fácilmente, hemos construído al mismo tiempo $\sqrt{3}$, a partir de la unidad, sin utilizar la regla.

Podemos ahora encontrar el inverso de un punto P interior a la circunferencia C. Primero hallaremos un punto R de la recta OP cuya distancia a O sea un múltiplo entero de OP y que quede exterior a C; es decir,

$$OR = n \cdot OP.$$

Podemos hacer esto llevando sucesivamente la distancia OP con el compás hasta salir fuera de C. Hallamos ahora el punto R' inverso del R, mediante la construcción antes dada. Entonces,

$$r^2 = OR' \cdot OR = OR' \cdot (n \cdot OP) = (n \cdot OR') \cdot OP.$$

Por tanto, P', tal que $OP' = n \cdot OR'$, es el punto inverso buscado.

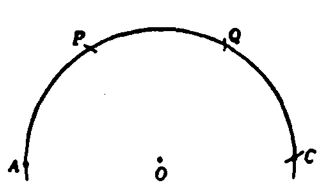

FIG. 42.—Duplicación de un segmento.

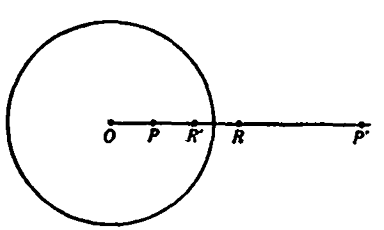

FIG. 43.—Inversión de un punto interior respecto a una circunferencia.

4. Forma de hallar sólo con el compás el punto medio de un segmento y el centro de una circunferencia.—Habiendo aprendido ya a determinar el inverso de un punto dado mediante el uso exclusivo del compás, podemos realizar algunas construcciones interesantes; p. ej., consideremos el problema de encontrar el punto medio entre dos puntos A y B, utilizando solamente el compás (¡sin trazar rectas!). He aquí la solución: tracemos la circunferencia de radio AB y centro B, y llevemos tres arcos de radio AB, a partir de A. El punto final C estará en la recta AB, siendo $AB = BC$. Dibujemos ahora la circunferencia de radio AB y centro A, y sea C' el punto inverso de C respecto a este círculo. Entonces: $AC' \cdot AC = AB^2$; o sea, $AC' \cdot 2AB = AB^2$, y $2AC' = AB$; por tanto, C' es el punto medio pedido.

Otra construcción con compás, que hace uso de puntos inversos, es la de hallar el centro de una circunferencia dada. Elegimos un punto P de la circunferencia y con centro en él trazamos otra circun-

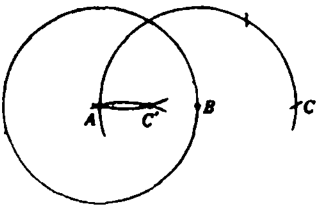

FIG. 44.—Determinación del punto medio de un segmento.

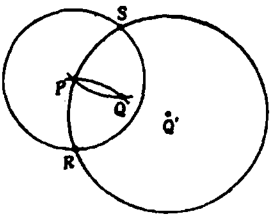

FIG. 45.—Determinación del centro de un círculo.

ferencia que corte a la dada en los puntos R y S. Con estos centros trazamos arcos de radios $RP = SP$, que se cortan en Q. Comparando con la figura 41, vemos que el centro desconocido Q' es inverso de Q respecto al círculo de centro P, por lo que Q' puede ser construído haciendo sólo uso del compás.

V. CONSTRUCCIONES CON OTROS INSTRUMENTOS. CONSTRUCCIONES DE MASCHERONI CON COMPÁS SOLAMENTE

***1. Una construcción clásica para duplicar el cubo.**—Hasta aquí hemos considerado únicamente problemas de construcciones geométricas con regla y compás. Cuando se permiten otros instrumentos, la variedad de las construcciones posibles se hace naturalmente más extensa; p. ej., los griegos resolvían el problema de duplicar el cubo de la forma siguiente: consideremos (Fig. 46) un ángulo recto rígido MZN y una cruz movible en ángulo recto B, VW, PQ. Dos varillas adicionales RS y TU pueden deslizarse perpendicularmente a los lados del ángulo recto. En la cruz se eligen dos puntos fijos E y G, de tal forma que $GB = a$ y $BE = f$ tengan longitudes prefijadas. Situando la cruz de modo que los puntos E y G estén sobre NZ y MZ, respectivamente, y deslizando las varillas TU y RS, podemos llevar el aparato entero a una posición en que tengamos el rectángulo $ADEZ$, por cuyos vértices A, D, E, pasan los brazos BW, BQ, BV de la cruz. Tal disposición es siempre posible, si $f > a$. Vemos entonces que $a : x = x : y = y : f$; de donde, si f es igual a $2a$ en el aparato, resulta

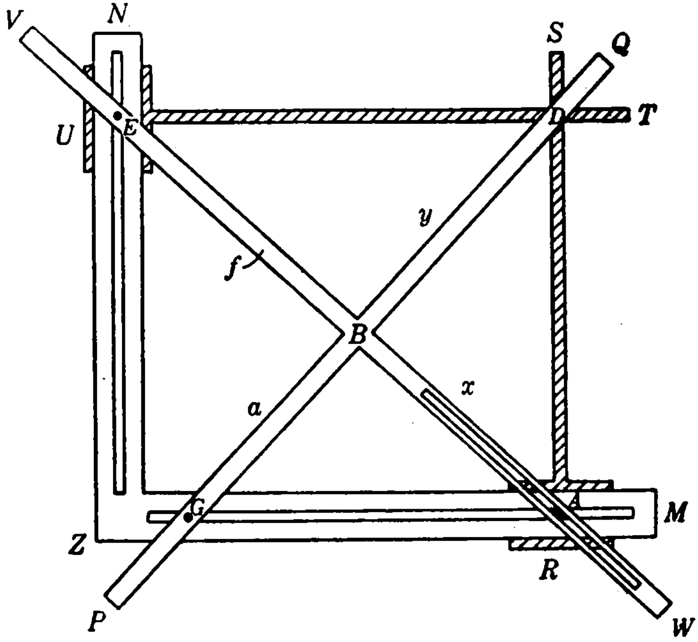

FIG. 46.—Instrumento para duplicar el cubo.

$x^3 = 2a^3$; por tanto, x es la arista de un cubo cuyo volumen es doble del cubo de arista a. Tenemos así resuelto el problema de duplicar el cubo.

2. Restricción de usar sólo el compás.—Resulta natural que si se permite una mayor variedad de instrumentos podamos resolver una colección más amplia de problemas de construcción, y cabe esperar que a una mayor restricción de instrumentos corresponda una clase más restringida también de las construcciones posibles; por ello, fué un descubrimiento sorprendente, debido al italiano Mascheroni (1750-1800), el de que *todas las construcciones geométricas posibles mediante la regla y el compás pueden hacerse sólo con el compás*. Naturalmente, no se puede trazar la recta que une dos puntos sin la regla, por lo que esta construcción fundamental no está en realidad comprendida en la teoría de Mascheroni. En cambio, puede suponerse que la recta está dada por dos de sus puntos. Mediante el uso del compás solo, se puede encontrar el punto de intersección de dos rectas dadas de este modo, como también las intersecciones de una circunferencia dada con una recta.

Quizá el ejemplo más sencillo de construcción de Mascheroni sea el de duplicar un segmento dado AB. La solución fué dada en la página 157, y en la siguiente hemos determinado el punto medio de un segmento. Vamos ahora a resolver el problema de bisecar un arco AB de una circunferencia de centro dado O. La construcción es la siguiente: desde A y B como centros trazamos dos arcos, de radio AO; a partir de O, llevamos los arcos OP y OQ iguales a AB. A continuación, dibujamos dos arcos de radios PB y QA y centros P y Q, que se cortan en R. Finalmente, con radio OR, describimos un arco con centro en P o Q hasta cortar a AB; el punto de intersección es el punto medio buscado del arco AB. Dejamos la demostración como ejercicio al lector.

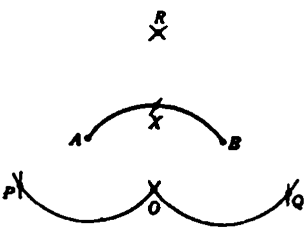

FIG. 47.—Bisección de un arco con el compás.

Sería imposible demostrar el teorema general de Mascheroni dando la construcción con compás solo para cada construcción posible con regla y compás, ya que el número de éstas no es finito. Sin embargo, podemos lograr el mismo objeto demostrando que cada una de las cuatro construcciones fundamentales siguientes es posible con el compás solo;

1) Trazar una circunferencia de centro y radio dados.

2) Hallar los puntos de intersección de dos circunferencias.

3) Hallar los puntos de intersección de una recta y una circunferencia.

4) Hallar el punto de intersección de dos rectas.

Toda construcción geométrica en el sentido usual, cuando se permite el uso de regla y compás, consiste en una sucesión finita de estas construcciones elementales. Las dos primeras son evidentemente posibles con compás solo. Las soluciones de los problemas más difíciles 3 y 4 dependen de las propiedades de la inversión desarrollada en la sección precedente.

Resolvamos el problema 3, consistente en hallar los puntos de intersección de una circunferencia C y una recta, dada por los puntos

A y B. Con centros A y B y radios AO y BO, respectivamente, dibujemos dos arcos, que se cortarán de nuevo en P. Determinemos ahora el punto Q inverso de P respecto a C, mediante la construcción con compás solo dada en la página 157. Tracemos la circunferencia de centro Q y radio QO (que debe cortar a C); los puntos de intersección X y X' de esta circunferencia con la dada, C, son los dos puntos buscados. Para probarlo necesitamos solamente demostrar que X y X' son equidistantes de O y P, ya que A y B lo son por construcción. Esto resulta del hecho de que el inverso de Q es un punto cuya distancia a X y X' es igual al radio de C (pág. 157). Observemos que la circun-

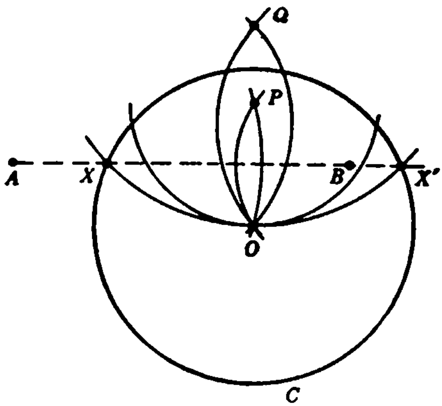

FIG. 48.—Intersección de una circunferencia con una recta que no pasa por su centro.

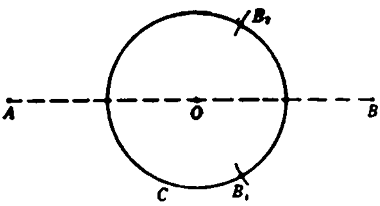

FIG. 49.—Intersección de una circunferencia con una recta que pasa por su centro.

ferencia que pasa por X, X' y O es inversa de la recta AB, ya que ésta y la circunferencia deben cortar a C en los mismos puntos. (Los puntos de la circunferencia son inversos de sí mismos.)

La construcción deja de ser válida sólo en el caso de que la recta AB pase por el centro de C. Pero entonces los puntos de intersección pueden determinarse mediante la construcción dada en la página 160, como puntos medios de arcos de C, obtenidos trazando con centro en B una circunferencia arbitraria que corte a C en B_1 y B_2.

El método para determinar la circunferencia inversa de la recta que une dos puntos dados permite una solución inmediata del problema 4. Sean dos rectas dadas AB y $A'B'$ (Fig. 50). Tracemos una circunferencia cualquiera C del plano y, mediante el método precedente, hallemos las circunferencias inversas de AB y $A'B'$, las cuales se cortan en O y en el punto Y. El punto X, inverso del Y, es el punto pedido, y puede construirse mediante el procedimiento ya dado. Que

X es el punto buscado es evidente por el hecho de que Y es el único punto con la propiedad de ser a la vez inverso de un punto de AB y de $A'B'$; luego el punto X, inverso del Y, debe estar en AB y $A'B'$.

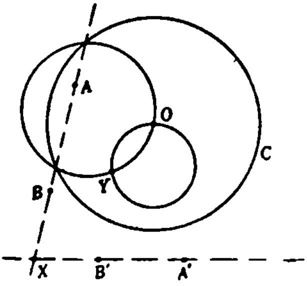

FIG. 50.—Intersección de dos rectas.

Con estas dos construcciones hemos completado la demostración de equivalencia entre las construcciones de Mascheroni sólo con el compás, y las construcciones geométricas usuales con regla y compás. No nos hemos cuidado de dar soluciones elegantes para cada problema particular, ya que nuestro objeto ha sido más bien el de penetrar en el fondo general de las construcciones de Mascheroni. Vamos a dar como ejemplo, sin embargo, las construcción del pentágono regular; con más precisión, vamos a hallar cinco puntos de una circunferencia que sean vértices de un pentágono regular inscrito.

Sea A un punto de la circunferencia dada K. El lado del hexágono regular inscrito es igual al radio de K, por lo que podemos hallar los puntos B, C, D sobre K, tales que $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = 60^\circ$ (figura 51). Con A y D como centros y radio AC, tracemos dos arcos que se cortarán en X. Entonces, si es O el centro de K, un arco de centro A y radio OX cortará a K en el punto medio F de $\widehat{BC}$ (véase pág. 160). Ahora, con el radio de K, tracemos un arco con centro en F, que encuentra a K en G y H. Sea Y un punto cuya distancia a G y H es OX, y que está separado de X por O. Entonces AY será igual al lado del pentágono buscado. La

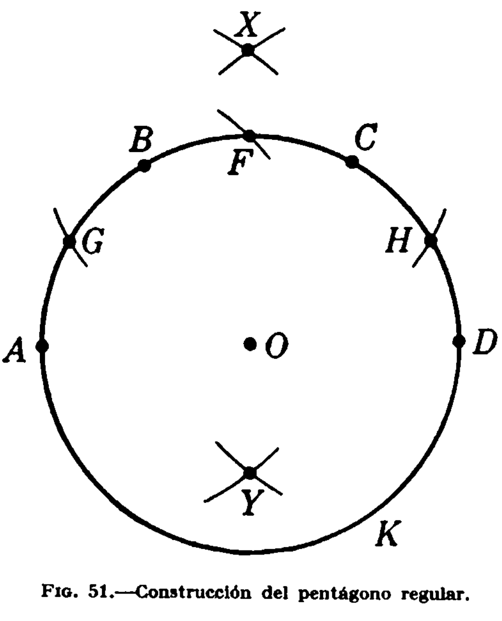

FIG. 51.—Construcción del pentágono regular.

demostración se deja como ejercicio al lector. Observemos que se han utilizado en la construcción solamente tres radios diferentes.

En 1928, el matemático danés Hjelmslev halló, en una librería de Copenhague, un libro llamado *Euclides Danicus*, publicado en 1672 por un oscuro autor, G. Mohr. Del título podría inferirse que este trabajo era simplemente una versión o comentario de los *Elementos* de Euclides. Pero cuando Hjelmslev examinó el libro se sorprendió al encontrar que contenía esencialmente el problema de Mascheroni y su solución completa, encontrada antes que Mascheroni.

Ejercicios: He aquí la descripción de las construcciones de Mohr. Confróntese su validez. ¿Por qué resuelven el problema de Mascheroni?

1. Sobre un segmento AB de longitud p trácese un segmento perpendicular BC. (*Solución:* prolónguese AB hasta un punto D, tal que $AB = BD$. Trácense circunferencias arbitrarias con centros A y D, determinando así C.)
2. Dados dos segmentos de longitudes p y q tales que $p > q$, hállese un segmento de longitud $x = \sqrt{p^2 - q^2}$, haciendo uso de 1.
3. Dado un segmento a, constrúyase el segmento $a\sqrt{2}$. [Obsérvese que $(a\sqrt{2})^2 = (a\sqrt{3})^2 - a^2$.]
4. Con dos segmentos dados, p y q, hállese un segmento $x = \sqrt{p^2 + q^2}$. [Utilícese la relación $x^2 = 2p^2 - (p^2 - q^2)$.] Háganse otras construcciones similares.
5. Utilizando los resultados anteriores, constrúyanse segmentos de longitudes $p + q$ y $p - q$, supuestos dados en el plano los segmentos de longitudes p y q.
6. Compruébese y demuéstrese la siguiente construcción para el punto medio M de un segmento dado AB de longitud a. En la prolongación de AB constrúyanse C y D tales que $CA = AB = BD$. Trácese el triángulo isósceles ECD con $EC = ED = 2a$, y hállese M como intersección de dos circunferencias de diámetros EC y ED.
7. Hállese la proyección ortogonal de un punto A sobre la recta BC.
8. Constrúyase x tal que $x : a = p : q$, si a, p, q son segmentos dados.
9. Hállese $x = ab$, si a y b son segmentos dados.

Inspirado por Mascheroni, Jacob Steiner (1796-1863) trató de utilizar sólo como instrumento la regla en lugar del compás. Naturalmente, la regla sola no puede llevarnos fuera de un cuerpo de números dado, por lo cual no basta para todos las construcciones geométricas en el sentido clásico. Lo notable es que Steiner fué capaz de restringir el uso del compás a una sola aplicación. Demostró que todas las construcciones en el plano que son posibles con regla y compás pueden hacerse sólo con la regla, siempre que se suponga dada *una* circunferencia fija, y su centro. Estas construcciones requieren métodos proyectivos y serán indicadas más adelante (véase Cap. IV, pág. 209).

* Esta circunferencia y su centro son imprescindibles; p. ej., si se da un círculo, pero no su centro, es imposible construir este último mediante la regla sola. Para demostrarlo hay que hacer uso de un resultado que será discutido más adelante

(Cap. IV, pág. 232). Existe una transformación del plano en sí mismo que tiene las siguientes propiedades: *a*) el círculo dado queda fijo en la transformación; *b*) toda recta se transforma en recta; *c*) el centro del círculo se transforma en algún otro punto. La mera existencia de tal transformación prueba la imposibilidad de contruir con la regla sola el centro de un círculo dado. Pues si la construcción fuera posible, consistiría en dibujar un cierto número de rectas y determinar sus intersecciones, entre sí, y con la circunferencia dada. Ahora bien: si a la figura total, formada por la circunferencia dada y todos los puntos y rectas de la construcción, se le aplica la transformación cuya existencia hemos supuesto, la figura transformada satisfará todas las exigencias de la construcción, pero dará como resultado un punto distinto del centro del círculo. Por tanto, tal construcción es imposible.

3. Trazado con instrumentos mecánicos. Curvas mecánicas. Cicloides.—Ideando mecanismos para dibujar curvas distintas de la circunferencia y de la recta, podemos ampliar el dominio de las figuras construíbles; p. ej., si tenemos un instrumento para trazar las hipérbolas $xy = k$, y otro para dibujar las parábolas $y = ax^2 + bx + c$, entonces todo problema que conduzca a la ecuación cúbica

$$ax^3 + bx^2 + cx = k, \qquad [1]$$

puede ser resuelto por construcción, utilizando sólo estos instrumentos. Pues si hacemos

$$xy = k, \qquad y = ax^2 + bx + c, \qquad [2]$$

resolver [1] equivale a resolver el sistema de ecuaciones [2] por eliminación de y; es decir, las soluciones de [1] son las abscisas x de los puntos de intersección de la hipérbola y la parábola de [2]. Así, las soluciones de [1] podrían construirse si dispusiéramos de instrumentos para dibujar la parábola y la hipérbola de las ecuaciones [2].

Desde la antigüedad, los matemáticos sabían que muchas curvas interesantes podían ser definidas y dibujadas mediante sencillos instrumentos mecánicos. De estas «curvas mecánicas» las *cicloides* son de las más notables. Tolomeo (200 a. de J. C.) las utilizó en forma muy ingeniosa para describir los movimientos de los planetas del sistema solar.

La cicloide más sencilla es la curva descrita por un punto fijo de la circunferencia de un círculo cuando rueda sin deslizar sobre una recta. La figura 53 nos muestra cuatro posiciones del punto P del círculo rodante. El aspecto general de la cicloide es el de una serie de arcos que se apoyan sobre la recta. Pueden obtenerse variaciones de esta curva eligiendo el punto P, ya en el interior del círculo (como en

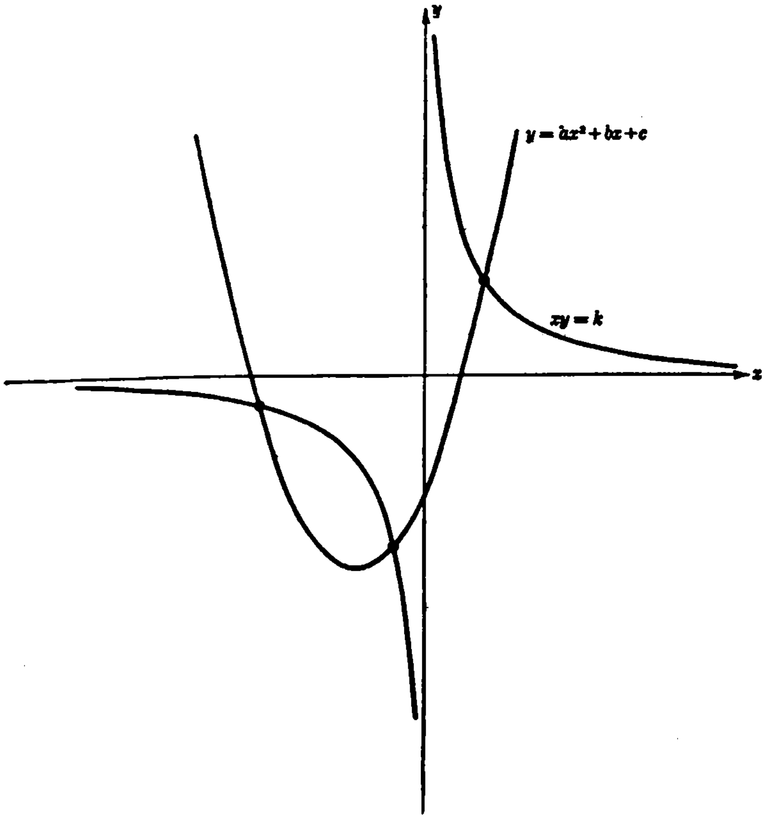

FIG. 52.—Solución gráfica de una ecuación cúbica.

un rayo de una rueda), ya en la prolongación de un radio (como en el reborde de la rueda de un tren). La figura 54 muestra estas dos curvas.

Se obtiene otra variante de la cicloide haciendo rodar la circunferencia, no sobre una recta, sino sobre otra circunferencia. Si el círculo rodante c, de radio r, es tangente interiormente al círculo mayor C,

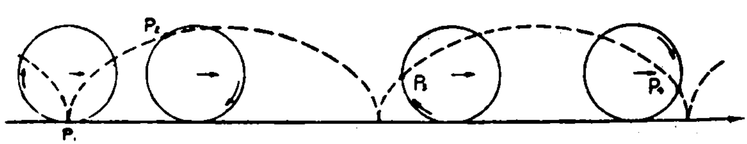

FIG. 53.—La cicloide.

de radio R, el lugar engendrado por un punto fijo de la circunferencia c se llama *hipocicloide.*

Si el círculo c describe la circunferencia entera de C una vez, el punto P retornará a su posición original sólo si el radio de C es un

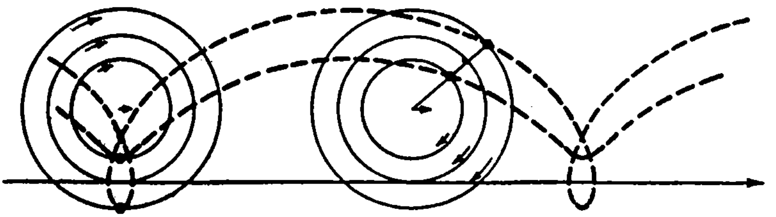

FIG. 54.—Cicloides generales.

múltiplo entero del de c. La figura 55 muestra el caso en que $R = 3r$. Con mayor generalidad, si el radio de C es m/n veces el de c, la hipocicloide se cerrará al cabo de n circuitos alrededor de C, y constará de m arcos. Un caso especial interesante se presenta si $R = 2r$. Todo

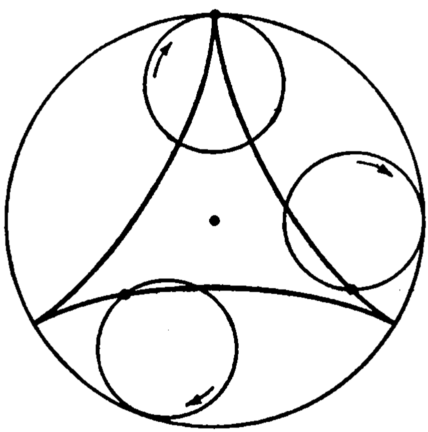

FIG. 55.—Hipocicloide de tres retrocesos.

punto P del círculo interior describe un diámetro del círculo mayor (Fig. 56). Proponemos como problema al lector la demostración de esta propiedad.

Aún puede engendrarse otro tipo de cicloide por medio de un círculo que rueda sobre otro fijo, permaneciendo tangente exteriormente a éste. Tal curva se llama *epicicloide.*

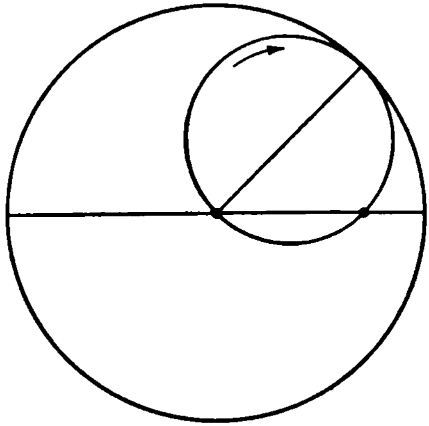

FIG. 56.—Movimiento rectilíneo por medio de puntos de un círculo que rueda sobre un círculo de radio doble.

***4. Conexiones. Inversores de Peaucellier y de Hart.**—Dejaremos por ahora el tema de las cicloides (que aparecerán nuevamente en un lugar inesperado) y estudiaremos otros métodos de engendrar curvas. Los instrumentos mecánicos más sencillos para trazar curvas son las *conexiones*. Una conexión consiste en un conjunto de varillas rígidas unidas de alguna manera mediante articulaciones móviles, de forma que el sistema total tenga suficiente libertad como para permitir a un punto del mismo describir una cierta curva. El compás es realmente una simple conexión, que consiste en principio en una varilla única fijada por un punto.

Las conexiones se han utilizado desde hace mucho tiempo en la construcción de máquinas. Uno de los ejemplos históricos famosos, el «paralelogramo de Watt», fué ideado por James Watt para resolver el problema de unir el pistón de su máquina de vapor con un punto de un volante, de forma que la rotación del volante hiciese mover el pistón en línea recta. La solución de Watt es sólo aproximada, y pese a los esfuerzos de muchos matemáticos distinguidos, el problema de construir una conexión que haga mover un punto *precisamente* en línea recta continuaba sin resolver. En un tiempo, cuando las demostraciones de irresolubilidad de ciertos problemas atraían enormemente la atención, fué formulada la conjetura de que la construcción de tal conexión era imposible. Fué por ello una gran sorpresa cuando, en 1864, un oficial naval francés, Peaucellier, inventó una sencilla conexión que resolvía el problema. Con la introducción de lubricantes eficaces, el problema técnico para las máquinas de vapor había perdido entonces su importancia.

El propósito de la conexión de Peaucellier es el de convertir un

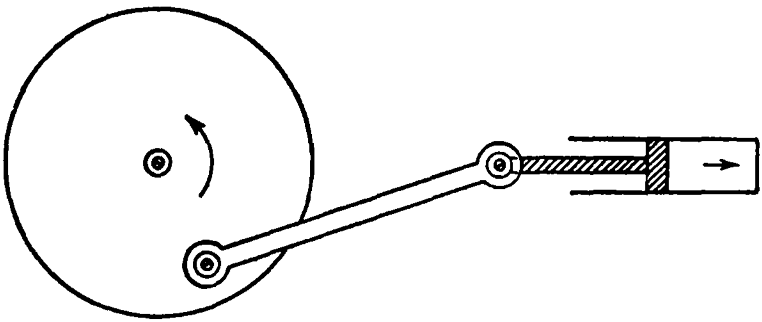

FIG. 57.—Movimiento rectilíneo transformado en rotación.

movimiento circular en rectilíneo. Está basado en la teoría de la inversión discutida en las páginas 153-57. Como se ve en la figura 58, la conexión consta de siete varillas rígidas; dos de longitud t, cuatro de longitud s, y la séptima de longitud arbitraria. O y R son dos pun-

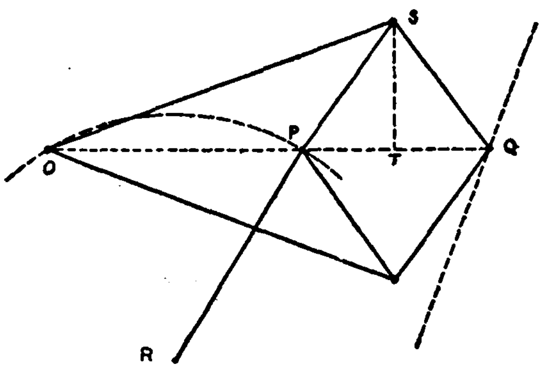

FIG. 58.—Transformación de Peaucellier de la rotación en movimiento rectilíneo.

tos fijos, situados de modo que $OR = PR$. El aparato entero puede moverse sujeto a las condiciones dadas. Vamos a demostrar que *si* P *describe una circunferencia de centro* R *con radio* PR, Q *describe un segmento de recta*. Designando el pie de la perpendicular de S a PQ por T, observemos que

$$\begin{aligned} OP \cdot OQ &= (OT - PT)(OT + PT) = OT^2 - PT^2 \\ &= (OT^2 + ST^2) - (PT^2 + ST^2) \\ &= t^2 - s^2. \end{aligned}$$

La cantidad $t^2 - s^2$ es una constante que llamaremos r^2. Como $OP \cdot OQ = r^2$, P y Q son puntos inversos respecto a la circunferencia de radio r y centro O. Cuando P describe una trayectoria circular (que pasa por O), Q describe la curva inversa de la circunferencia, la cual es una recta, pues hemos visto que la inversa de una circunferencia que pasa por O es una recta. La trayectoria de Q es, por tanto, una recta, que se traza sin hacer uso de la regla. Otra conexión que resuelve el mismo problema es el inversor de Hart. Este consta de cinco varillas unidas como indica la figura 59. Aquí $AB=CD$, $BC=AD$. O, P y Q son puntos fijos de las varillas AB, AD y CB, respectivamente, tales que $AO/OB = AP/PD = CQ/QB = m/n$. Los puntos O y S son fijos, de forma que $OS = PS$, mientras que el resto del aparato puede moverse libremente. Es evidente que AC es constantemente paralela a BD; por tanto, O, P y Q son siempre colineales y OP es paralela a AC. Tracemos AE y CF perpendiculares a BD; tenemos:

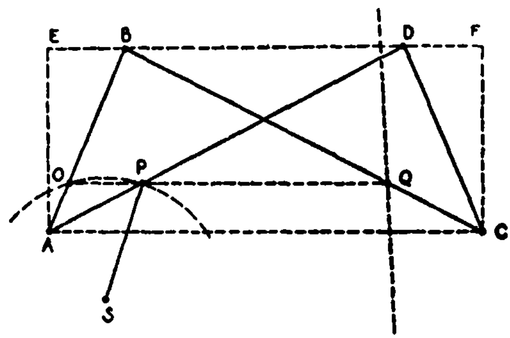

FIG. 59.—Inversor de Hart.

$$AC \cdot BD = EF \cdot BD = (ED + EB)(ED - EB) = ED^2 - EB^2.$$

Pero $ED^2 + AE^2 = AD^2$, y $EB^2 + AE^2 = AB^2$. Por tanto, $ED^2 - EB^2 = AD^2 - AB^2$. Ahora bien:

$$OP/BD = AO/AB = m/(m+n) \quad \text{y} \quad OQ/AC = OB/AB = n/(m+n).$$

En consecuencia,

$$OP \cdot OQ = [mn/(m+n)^2]\, BD \cdot AC = [mn/(m+n)^2]\,(AD^2 - AB^2).$$

Esta cantidad es la misma para todas las posiciones posibles de la conexión; por tanto, P y Q son puntos inversos respecto a cierta circunferencia de centro O. Cuando al aparato se mueve, P describe una circunferencia de centro S y que pasa por O, mientras su inverso Q describe una recta.

Pueden construirse otras conexiones (por lo menos en principio), para trazar elipses, hipérbolas, y, en general, toda curva dada por una ecuación algebraica $f(x, y) = 0$ de cualquier grado.

VI. COMPLEMENTOS SOBRE INVERSIÓN Y SUS APLICACIONES

1. Invariancia de ángulos. Haces de círculos.—Aunque la inversión respecto de una circunferencia cambia la forma de las figuras geométricas, es un hecho notable el que las nuevas figuras continúen poseyendo muchas de las propiedades de las figuras primitivas. Éstas son las propiedades que no cambian, o «invariantes» de la transformación. Como ya sabemos, la inversión transforma rectas y circunferencias en rectas y circunferencias; añadiremos ahora otra propiedad importante: *el ángulo entre dos rectas o curvas es invariante en la inversión.* Con esto queremos decir que dos curvas secantes se transforman por una inversión en otras dos curvas que se cortan bajo el mismo ángulo. Por ángulo entre dos curvas entendemos, naturalmente, el ángulo formado por sus tangentes.

La demostración puede estudiarse en la figura 60, que ilustra el caso especial de una curva C que corta a una recta OL en un punto P. La inversa C' de C corta a OL en el punto inverso P', el cual, como

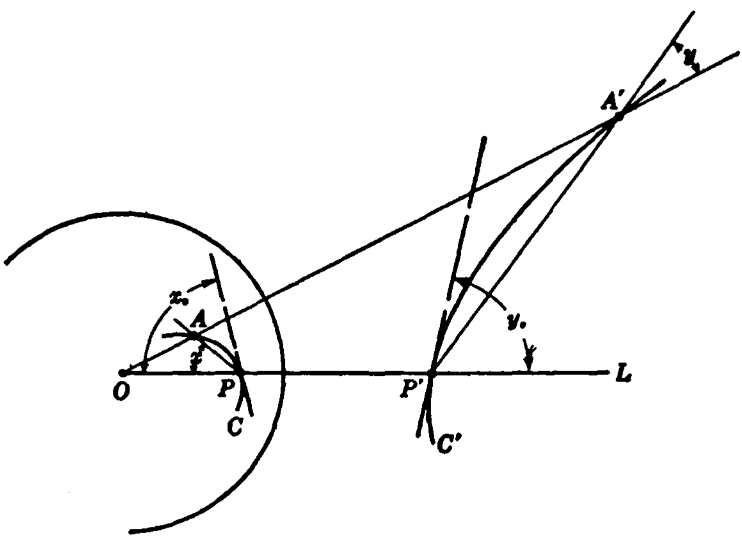

FIG. 60.—Conservación de los ángulos en la inversión.

OL es su propia inversa, está en OL. Demostraremos que el ángulo x_0 entre OL y la tangente a C en P es igual en magnitud al ángulo correspondiente y_0.

Para ello elegimos un punto A de la curva C próximo al P, y trazamos la secante AP. El inverso de A es un punto A' que, por estar a la vez en la recta OA y en la curva C', debe coincidir con su intersección. Dibujemos la secante $A'P'$. Por definición de inversión,

$$r^2 = OP \cdot OP' = OA \cdot OA',$$

o

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OA'}{OP'};$$

es decir, los triángulos OAP y $OA'P'$ son semejantes. Por consiguiente, el ángulo x es igual al $OA'P'$, que llamaremos y. La etapa final consiste en hacer mover el punto A sobre C, aproximándolo al P; esto obliga a la secante AP a girar hasta la posición de la tangente a la curva C en P, mientras el ángulo x tiende al x_0. Al mismo tiempo A' se aproxima a P', y $A'P'$ gira hasta la posición de la tangente a C' en P'; el ángulo y tiende al y_0. Como x e y son iguales en cualquier posición de A, tendremos en el límite: $x_0 = y_0$.

Nuestra demostración queda incompleta, sin embargo, pues hemos considerado sólo el caso de una curva que corta a una recta que pasa por O. El caso general de dos curvas C y C^*, que forman un ángulo z en P, es ahora fácil de estudiar. Es evidente que la recta OPP' divide a z en dos ángulos, cada uno de los cuales se conserva en la inversión.

Debe observarse que aunque la inversión conserva la *magnitud* de los ángulos, invierte su *sentido*; es decir, si un rayo por P describe el ángulo x_0 en sentido contrario al de las agujas del reloj, su imagen recorrerá el ángulo y_0 en el sentido opuesto.

Una consecuencia particular de la invariancia de los ángulos en la inversión es que si dos circunferencias o curvas son *ortogonales* (es decir, se cortan en ángulo recto), continúan siendo ortogonales después de la inversión, mientras que dos curvas tangentes (es decir, que forman ángulo nulo) quedan tangentes.

Consideremos la familia de todas las circunferencias que pasan por el centro de inversión O y por otro punto fijo A del plano. Por lo dicho en la página 155, sabemos que esta familia de circunferencias se transformará en un haz de rectas que pasan por A'. Las circunferencias ortogonales a las primeras se transforman en circunferencias ortogonales a las rectas del haz A', como se ve en la figura 61. (Las circunferencias ortogonales están dibujadas de trazos). El aspecto sencillo del haz de rectas resulta muy diferente del de la familia de cir-

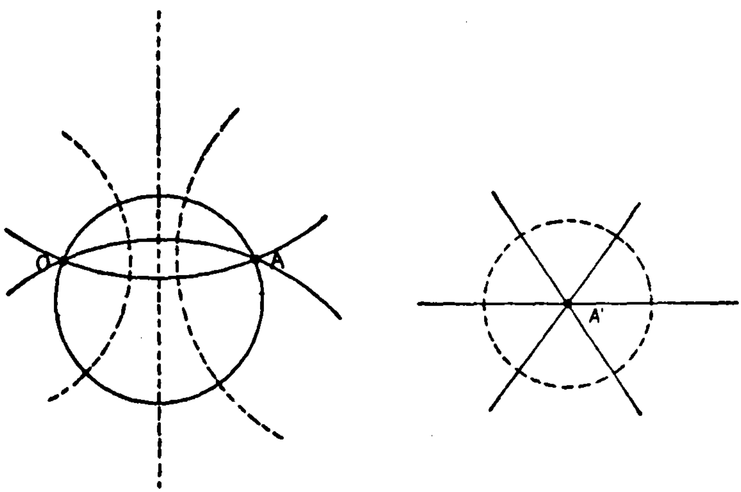

FIG. 61.—Haces de círculos ortogonales relacionados por inversión.

cunferencias, pese a que vemos que están íntimamente relacionados, pues, en efecto, desde el punto de vista de la inversión, son por completo equivalentes.

Otro ejemplo del efecto de la inversión lo constituye una familia de círculos tangentes entre sí en el punto de inversión. Efectuada la

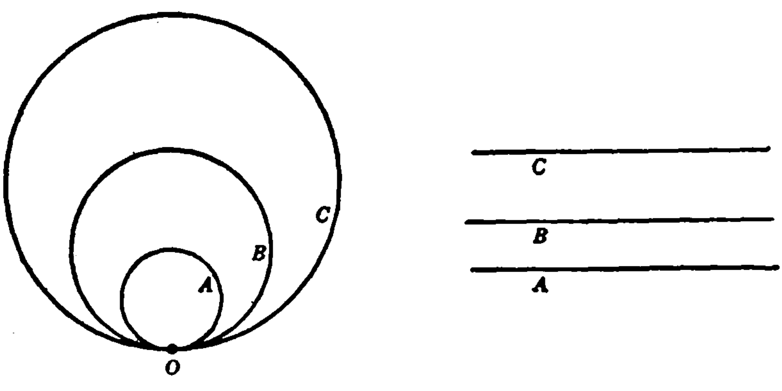

FIG. 62.—Circunferencias tangentes transformadas en rectas paralelas.

transformación se tendrá un haz de rectas paralelas, pues las imágenes de las circunferencias son rectas y ningún par de éstas se corta, ya que las circunferencias originales no tienen otro punto común que el O.

2. Aplicación al problema de Apolonio.—Una buena ilustración de la utilidad de la inversión es la siguiente solución geométrica inmediata del problema de Apolonio. Mediante una inversión respecto a un punto cualquiera, el problema de Apolonio para tres círculos dados puede transformarse en el problema de Apolonio correspondiente a otros tres círculos (¿por qué?). Luego, si podemos resolver el problema para una terna cualquiera de circunferencias, quedará resuelto para otra terna cualquiera, obtenida de la primera por inversión. Sacaremos ventaja de este hecho eligiendo entre todas estas ternas de círculos equivalentes una determinada, para la cual el problema resulta casi trivial.

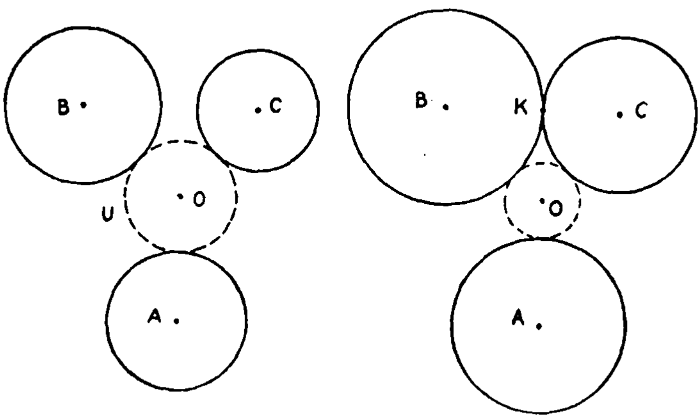

FIG. 63.—Construcción preliminar de Apolonio.

Partimos de tres circunferencias de centros A, B, C, y supondremos que la circunferencia buscada U, de centro O y radio ρ, es tangente exteriormente a los tres círculos dados. Si aumentamos los radios de los tres círculos dados en una misma cantidad d, entonces la circunferencia de igual centro O y radio $\rho - d$ resolverá, evidentemente, el nuevo problema. Como fase inicial haremos uso de este hecho para reemplazar las tres circunferencias dadas por otras tres, tales que dos de ellas sean tangentes entre sí en un punto K (Fig. 63). A continuación, invertiremos la figura entera respecto de un círculo de centro K. Las circunferencias de centros B y C se transformarán en rectas paralelas b y c, mientras la tercera se transformará en otra circunferencia a (Fig. 64). Sabemos que a, b y c pueden ser construídos con regla y compás. La circunferencia desconocida U se transformará en una circunferencia u tangente a a, b y c, y su radio, r, es evidentemente la mitad de la distancia entre b y c.

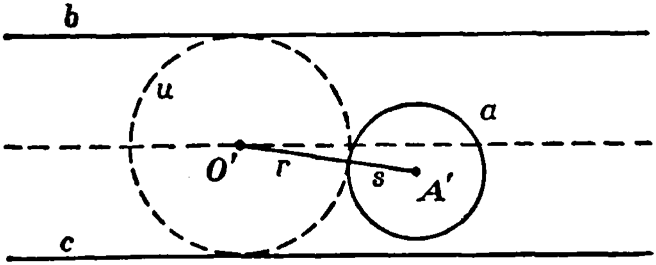

FIG. 64.—Solución del problema de Apolonio.

Su centro O' es una de las dos intersecciones de la paralela media entre b y c con la circunferencia de centro A' (centro de a) y radio $r + s$ (s es el radio de a). Finalmente, por construcción de la circunferencia inversa de u, determinaremos el centro del círculo de Apolonio buscado, U. (Su centro O será el inverso, en la circunferencia de inversión, del punto inverso de K en u.)

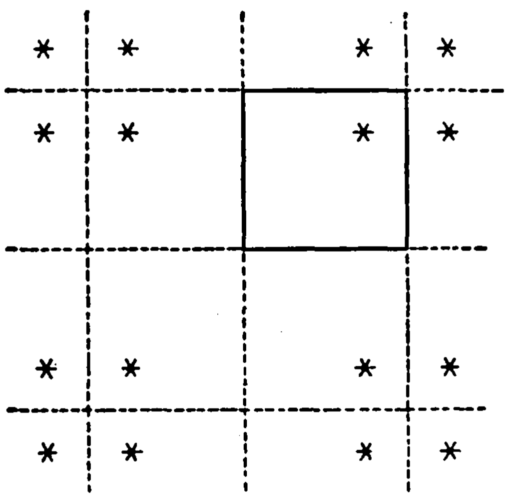

FIG. 65.—Simetría reiterada sobre los cuatro lados de un cuadrado.

***3. Simetrías reiteradas.**—Para todos son familiares los extraños fenómenos de reflexión que se producen cuando se dispone de más de un espejo. Si las cuatro paredes de una habitación rectangular estuvieran cubiertas con cuatro espejos ideales no absorbentes, un punto luminoso tendría infinitas imágenes, cada una correspondiente a cada habitación congruente obtenida por reflexión (figura 65). Un conjunto de espejos menos regular (p. ej., tres espejos) dará una serie mucho más complicada de imágenes. La configuración resultante puede ser descrita fácilmente sólo si los triángulos reflejados forman un cubrimiento sin solapamiento del plano. Esto sucede sólo

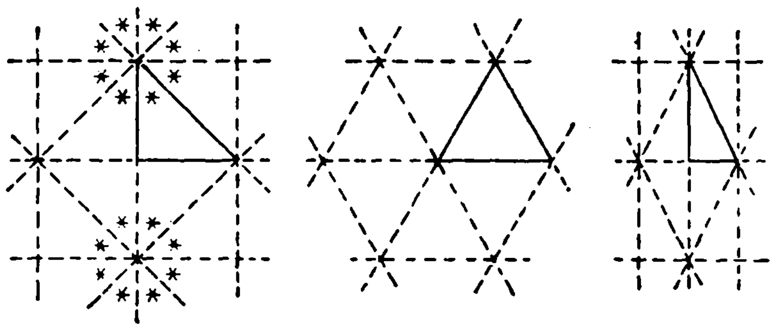

FIG. 66.—Constelaciones regulares de espejos triangulares.

en los casos del triángulo isósceles rectángulo, el triángulo equilátero y la mitad rectangular de éste. (Véase Fig. 66.)

La situación se hace mucho más interesante si consideramos inversiones repetidas respecto a un par de circunferencias. Colocándonos entre dos espejos circulares concéntricos se pueden ver otros infinitos

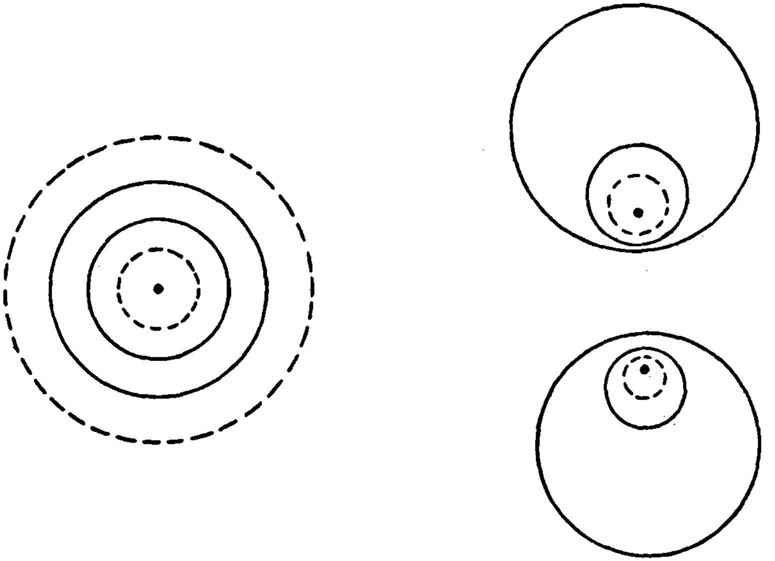

FIG. 67.—Reflexión reiterada en sistemas de dos círculos.

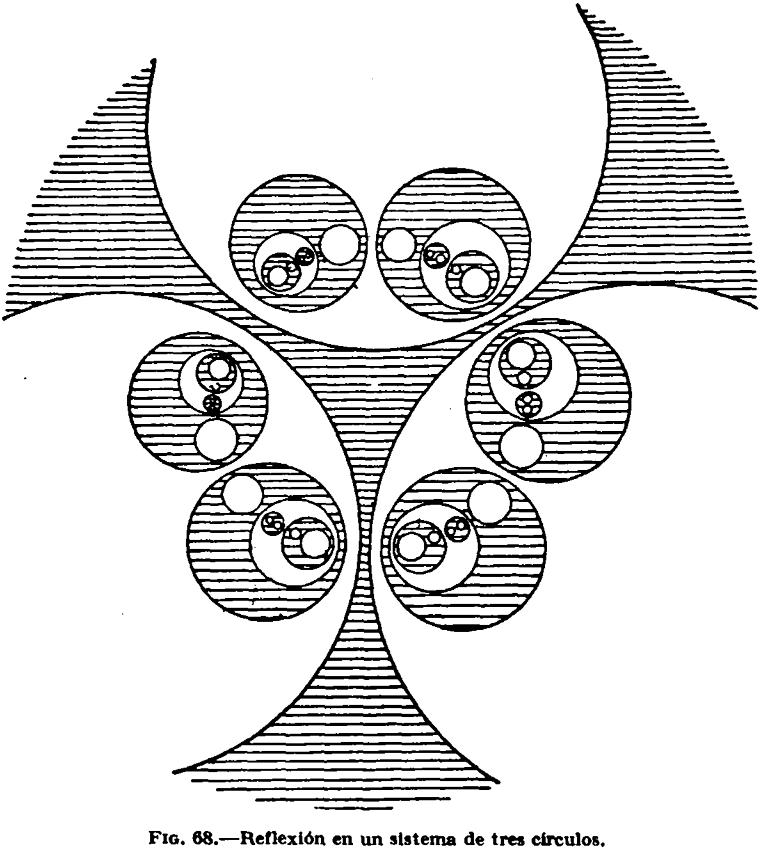

FIG. 68.—Reflexión en un sistema de tres círculos.

círculos concéntricos. Una sucesión de estos círculos tiende a infinito, mientras la otra se concentra alrededor del centro.

El caso de dos circunferencias exteriores es algo más complicado. Aquí los círculos y sus imágenes se reflejan sucesivamente uno en otro disminuyendo en cada reflexión, hasta reducirse a dos puntos, uno en cada círculo. (Estos puntos tienen la propiedad de ser inversos respecto a ambos círculos; véase figura 67.) Con tres círculos se forma el bello dibujo de la figura 68.