Examen parcial 2

(3 nov, 2010)

1. (20 pts) Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes en un campo F.
   a) (2 pts) Define: un campo de descomposición para $f(x)$.
   b) (8 pts) Demuestra: existe un campo de descomposición para $f(x)$.
   c) (10 pts) Demuestra: dadas dos extensiones K/F, K'/F, tal que K, K' son campos de descomposición para $f(x)$, existe un isomorfismo de campos $K \to K'$ cuya restricción a F es la identidad.
2. (80 pts) Sea $f(x) = x^5 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y sea $K = \mathbb{Q}(\alpha, \omega) \subset \mathbb{C}$, donde $\alpha = \sqrt[5]{2}$ y $\omega = e^{2\pi i/5}$.
   a) (2 pts) Demuestra que $f(x)$ es irreducible.
   b) (3 pts) Demuestra que K es un campo de descomposición para $f(x)$.
   c) (5 pts) Demuestra que $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois de grado 4, cuyo grupo de Galois es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$.
   d) (5 pts) Encuentra todos los subcampos de $\mathbb{Q}(\omega)$.
   e) (5 pts) Demuestra que $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ es una extensión de grado 5 cuyo grupo de Galois es trivial, por lo que no es una extensión de Galois.
   f) (5 pts) Encuentra todos los subcampos de $\mathbb{Q}(\alpha)$.
   g) (5 pts) Encuentra el grado de la extensión $K/\mathbb{Q}$.
   h) (45 pts) Sea G el grupo de Galois de $K/\mathbb{Q}$. ¿Qué puedes concluir de los incisos anteriores acerca del grupo G?

      Sugerencias: G es isomorfo a un subgrupo de S_5 de orden 20, actuando transitivamente en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; G contiene un subgrupo normal N isomorfo a $\mathbb{Z}_5$ tal que G/N es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$; G contiene un subgrupo de orden 4 que no es normal, por lo que G no es abeliano.
   i) Extra crédito (opcional): determina a G como un subgrupo de S_5 (el grupo de permutaciones de las raices de $f(x)$), encuentra a todos los subgrupos de G y los subcampos de K.