Examen final

(3 dic, 2010)

Existe o no existe?

En cada uno de los siguientes incisos hay que decidir si existe un cierto objeto: en caso que existe *solo hay que dar un ejemplo explicito* (no basta con una demostración que existe). Si no existe hay que dar una explicación *breve* (no es necesario dar una demostración completa).

Ejemplos:

1. Una extensión de campos de grado 2.

$\triangleright$ Existe. $\mathbb{C}/\mathbb{R}$. $\square$

2. Un campo con 18 elementos.

$\triangleright$ No existe. Un campo finito tiene característca $p > 0$ para algun primo p, por lo que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$ de dimension finita, por lo que el número de elementos en el campo debe ser una potencia de p. $\square$

Hay resolver 16 de los incisos. Si resuelves mas solo cuentan tus mejores 16.

Los incisos

1. Un campo con 9 elementos.
2. Un campo infinito de característica 2.
3. Una extensión de grado infinito de un campo finito.
4. Dos extensiones no isomorfas de $\mathbb{Z}_2$ de grado 3.
5. Dos extensiones no isomorfas de $\mathbb{Q}$ de grado 3.
6. Una extensión de campos con grupo de Galois no conmutativo.
7. Una extensión de $\mathbb{Q}$ de grado 6 con grupo de Galois de orden 4.
8. Una extensión de $\mathbb{Q}$ de grado 6 con grupo de Galois de orden 3.
9. Una extensión de Galois de $\mathbb{Q}$ de grado 7.
10. Un polinomio irreducible de grado 3 sobre $\mathbb{Z}_3$.
11. Dos polinomios en $\mathbb{Q}[x]$, irreducibles y del mismo grado, con grupos de Galois con ordenes distintos.
12. Dos polinomios en $\mathbb{Q}[x]$, irreducibles y del mismo grado, con grupos de Galois con el mismo orden pero no isomorfos.
13. Un ángulo $\theta \in (0, \pi/17)$ que no se puede trisectar con compas y regla.
14. Un ángulo $\theta \in (0, \pi/17)$ que sí se puede trisectar con compas y regla.
15. Un elemento primitivo de la extensión $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}]/\mathbb{Q}$.
16. Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ de grado 2010 sobre $\mathbb{Q}$.
17. Un elemento $\alpha \in \mathbb{Q}(e^{2\pi i/11})$ de grado 5 sobre $\mathbb{Q}$.
18. Una extensión K de $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ tal que $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois.
19. Un automorfismo de orden 4 de $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/17})$.